Regras de preco não-lineares, contratos de volatilidade, e exercício optimal de opções executivas

M. R. Grasselli
Dept. of Mathematics and Statistics
McMaster University

Ibmec - São Paulo
11 de agosto de 2005

"Somehow a very poor fellow obtains a lottery ticket that will yield with equal probability either nothing or twenty thousand ducats. Will this man evaluate his chance of winning at ten thousand ducats? Would he not be ill-advised to sell this lottery ticket for nine thousand ducats? To me it seems that the answer is in the negative. On the other hand I am inclined to believe that a rich man would be ill-advised to refuse to buy the lottery ticket for nine thousand ducats.

If I am not wrong then it seems clear that all men cannot use the same rule to evaluate the gamble (...) the determination of the value of an item must not be based on its price, but rather on the utility it yields. The price of the item is dependent only on the thing itself and is equal for everyone; the utility, however, is dependent on the particular circumstances of the person making the estimate. Thus there is no doubt that a gain of one thousand ducats is more significant to a pauper than to a rich man (...)"

“Another rule which may prove useful can be derived from our theory. This is the rule that it is advisable to divide goods which are exposed to some danger into several portions than to risk them all together.”

Daniel Bernoulli (1738)

Programa

- Introdução
- Preço por Indiferença
- Mercados Markovianos de dois fatores
- Derivativos de volatilidade
- Opções Reais em Mercados Completos
- Opções executivas

1. Introdução

Modelo: Consideremos modelos de dois fatores da form:

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(\mu - r)dt + S_t \sigma dW_t \\ dY_t &= a dt + b[\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2} dZ_t] \\ dV_t &= Y_t dt \end{aligned} \tag{1}$$

para certas funções determinísticas μ, σ, a, b, onde (W_t, Z_t) são movimentos Brownianos independentes e ρ é um coeficiente de correlação constante.

Se tivermos $\sigma = \sigma(t, Y_t)$, isto é interpretado como um modelo para volatilidade estocástica. Quando μ e σ são independentes de Y_t, interpretamos Y_t como um ativo não comercializado, correlacionado com um ativo comercializado (descontado) S_t.

Portfólio de hedging optimal: a estratégia adotada por um investidor que, ao ser confrontado com uma obrigação financeira (descontada) B, com maturidade numa data futura T, tenta resolver o problema de controle estocástico

$$u(x) = \sup_{H \in \mathcal{A}} E\left[U\left(X_T - B\right) \middle| X_0 = x\right], \tag{2}$$

onde X_T representa o montante final (descontado) obtido ao manter H_t unidades do ativo S_t em cada instante $0 \leq t \leq T$.

Função de Utilidade: $U(x) = -e^{-\gamma x}$, onde $\gamma > 0$ é o parâmetro de aversão ao risco.

Estratégias admissíveis: Além de terem de ser auto-financiados, restringiremos a classe $\mathcal{A}$ de porfólios admissíveis ao seguinte conjunto:

$\mathcal{A} = \{H \in L(S) : (H \cdot S)_t$ é um Q–martingale para toda Q $\in \mathcal{M}_f\}$.

Contratos: Finalmente, os contratos (descontados) B são supostos serem variáveis aleatórias da forma $B = B(S_T, Y_T, V_T)$, satisfazendo

$E[e^{(\gamma+\iota)B}] < \infty$ and $E[e^{-\iota B}] < \infty$ para algum $\iota > 0$

2. Preço por Indiferença

Sob essas condicões, segue como decorrência de dualidade convexa (Becherer 2004; Delbaen *et al* 2002; Kabanov and Stricker 2002; Owen 2002) que o problema de hedge optimal (2) tem uma solução única $H^B \in \mathcal{A}$ satisfazendo

$$U'(X_T^B - B) = \xi \frac{dQ^B}{dP}, \tag{3}$$

onde $\xi = u'(x)$ e $Q^B \in \mathcal{M}^f \cap \mathcal{M}^e$ é o único maximizante do problema dual correspondente:

$$\sup_{Q \in \mathcal{M}^f} E^Q \left[\gamma B - \log \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right]. \tag{4}$$

Suponha que a solução H^B tenha sido encontrada e defina o equivalente de certeza exponencial para o contrato B no instante t como o único semimartingale c_t^B satisfazendo

$$U(X_t - c_t^B) = E\left[U\left(X_t + \int_t^T H^B dS - B\right)\middle| \mathcal{F}_t\right]. \tag{5}$$

Em outras palavras,

$$c_t^B = \frac{1}{\gamma} \log E\left[\exp\left(-\gamma \int_t^T H^B dS + \gamma B\right)\middle| \mathcal{F}_t\right]. \tag{6}$$

O preço de indiferença (para venda) do contrato B é definido como o valor que deixa o agente indiferente entre vender ou não o contrato. Ou seja, é a solução única π_t^B para a equação

$$\sup_{H \in \mathcal{A}} E\left[U\left(X_t + \int_0^T H dS\right)\right] = \sup_{H \in \mathcal{A}} E\left[U\left(X_t + \pi_t^B + \int_0^T H dS - B\right)\right].$$

Vemos que essa equação é equivalente a

$$U(X_t - c_t^0) = U(X_t + \pi_t^B - c_t^B),$$

portanto o preço de indiferença é dado por

$$\pi_t^B = c_t^B - c_t^0. \tag{7}$$

Preço por utilidade marginal: Considere o preço de indiferença $\pi^{\varepsilon B}$ para um contrato infinitesimal εB. Por diferenciação da indentidade

$$U(x - c_0^{\varepsilon B}) = E\left[U\left(x + \int_0^T H^{\varepsilon B} dS - \varepsilon B\right)\right]$$

no ponto $\varepsilon = 0$, obtemos a formula de Davis

$$\left.\frac{dc_0^{\varepsilon B}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = E_t^{Q^0}[B].$$

Portanto, em primeira ordem em ε, o preço de indiferença exponencial para εB pode ser obtido como o valor esperado de B com respeito a medida de Merton Q^0. Segue de (4) que esta é a medida de martingale (local) com entropia relativa mínima com respeito à medida P.

3. Mercados Markovianos de dois fatores

O preço de mercado do risco de volatilidade

Considere o processo de densidade

$$\Lambda_t^B := E\left[\frac{dQ^B}{dP}\middle| \mathcal{F}_t\right], \tag{8}$$

o qual, em sendo um martingale exponencial, pode ser expresso como

$$\frac{d\Lambda_t^B}{\Lambda_t^B} = -[\lambda_t dW_t + \nu_t^B dZ_t], \tag{9}$$

onde $\lambda_t := \frac{\mu - r}{\sigma}$.

Definimos então o processo ν_t^B como o preço de mercado do risco por utilidade associado ao contrato B.

Proposition 1 *O preço de mercado do risco por utilidade exponencial do contrato B é dado por*

$$\nu_t^B = -\gamma b \partial_y c^B \sqrt{1-\rho^2}, \tag{10}$$

e a solução única $H_t^B = h^B(t, S_t, Y_t)$ para o problema de hedge é dada por

$$h^B(t,s,y) = \partial_s c_t^B + \frac{b\rho}{s\sigma}\partial_y c_t^B + \frac{(\mu - r)}{\gamma s \sigma^2}. \tag{11}$$

Em particular

$$\nu_t^0 = -\gamma b \partial_y c^0 \sqrt{1-\rho^2}. \tag{12}$$

Corollary 2 *O equivalente de certeza* $c_t^B = c^B(t, S_t, Y_t, V_t)$ *satisfaz*

$$c_t^B \; + \; \left[a - \frac{b\rho(\mu - r)}{\sigma}\right] c_y^B + y c_v^B + \frac{1}{2}\left(s^2\sigma^2 c_{ss}^B + 2s\sigma\rho c_{sy}^B + b^2 c_{yy}^B\right)$$
$$-\frac{(\mu - r)^2}{2\gamma\sigma^2} + \frac{\gamma(1-\rho^2)}{2} b^2 (c_y^B)^2 = 0 \qquad (13)$$

com condição final $c^B(T, s, y, v) = B(s, y, v)$.

3. Contratos de volatilidade

Proposition 3 *Considere um contrato da forma* $B = B(Y_T, V_T)$ *e assuma que* λ_t *é um processo adaptado para o qual a medida de martingale minimal*

$$\frac{d\widetilde{Q}}{dP} = \exp\left(-\int_0^T \frac{\lambda_s^2}{2} ds - \int_0^T \lambda_s dW_s\right) \tag{14}$$

é bem definida. Então o processo

$$\Xi_t = e^{\gamma(1-\rho^2)c_t^B} e^{-\int_0^t \frac{(1-\rho^2)}{2}\lambda_s^2 ds} \tag{15}$$

é um $\widetilde{Q}$*–martingale local. Se, além disso,* ν^B *satisfaz uma SDE, então* Ξ_t *é um martingale.*

Corollary 4 *O preço de indiferença de um contrato de volatilidade $B = B(Y_T, V_T)$ pode ser escrito como*

$$\pi_t^B = \frac{1}{\gamma(1-\rho^2)} \log \left(\frac{E_t^{\widetilde{Q}} \left[e^{\gamma(1-\rho^2)B(Y_T,V_T)} e^{-\int_t^T \frac{(1-\rho^2)}{2}\lambda_s^2 ds} \right]}{E^{\widetilde{Q}} \left[e^{-\int_t^T \frac{(1-\rho^2)}{2}\lambda_s^2 ds} \right]} \right) \quad (16)$$

4. Modelos recíprocos afins

Considere primeiro o caso $B = B(Y_T)$. Tomemos

$$\sigma(t, Y_t) = \sqrt{\frac{(1-\rho^2)(\mu - r)^2}{2}} \frac{1}{Y_t + \varepsilon}, \tag{17}$$

com $\varepsilon > 0$. Nesse caso, o denominador e o numerador em (16) são, respectivamente, os equivalentes formais para o preço de um cupom zero e um derivativo de taxa de juro sob a medida $\widetilde{Q}$ com uma "taxa livre de risco"

$$\frac{(1-\rho^2)}{2}\lambda_t^2 = Y_t + \varepsilon. \tag{18}$$

Escrevemos a dinâmica de Y_t sob a medida $\tilde{Q}$ como

$$dY_t = \tilde{\alpha}(\tilde{\kappa} - Y_t)dt + \tilde{\beta}\sqrt{Y_t}\left[\rho d\widetilde{W}_t + \sqrt{1-\rho^2}dZ_t\right], \qquad (19)$$

para constantes $\tilde{\alpha}, \tilde{\kappa}, \tilde{\beta} > 0$ satisfazendo $4\tilde{\alpha}\tilde{\kappa} > \tilde{\beta}^2$. Obtemos assim que os coeficientes para a dinâmica de Y_t sob a medida histórica P são

$$a(t, Y_t) = \tilde{\alpha}(\tilde{\kappa} - Y_t) + \tilde{\beta}\rho\sqrt{\frac{2(\varepsilon + Y_t)Y_t}{1-\rho^2}} \qquad (20)$$

$$b(t, Y_t) = \tilde{\beta}\sqrt{Y_t} \qquad (21)$$

Formulas de preço e hedging

Proposition 5 *No modelo recíproco CIR, o preço de indiferença de* $B = B(Y_T)$ *é*

$$\frac{1}{\gamma(1-\rho^2)} \log \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[(M(u,t,T) + N(u,t,T)y\right] \widehat{g}(u)du}{\exp(M(0,t,T) + N(0,t,T)y)} \right\}, \quad (22)$$

onde $\widehat{g}$ *denota a transformada de Fourier de* $g(y) = e^{\gamma(1-\rho^2)B(y)}$ *e*

$$N(u,t,T) = \frac{(b_2 + iu)b_1 - (b_1 + iu)b_2 e^{\Delta(t-T)}}{(b_2 + iu) - (b_1 + iu)e^{\Delta(t-T)}}, \quad (23)$$

$$M(u,t,T) = \frac{-2\alpha\kappa}{\beta^2} \log\left(\frac{b_2 + iu}{b_2 - N}\right) + \alpha\kappa b_1(t-T), \quad (24)$$

com $b_2 > b_1$ *sendo as raízes da equação* $x^2 - \frac{2\widetilde{\alpha}}{\tilde{\beta}^2}x - \frac{2}{\tilde{\beta}^2}$ *e* $\Delta = \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 2\tilde{\beta}^2}$.

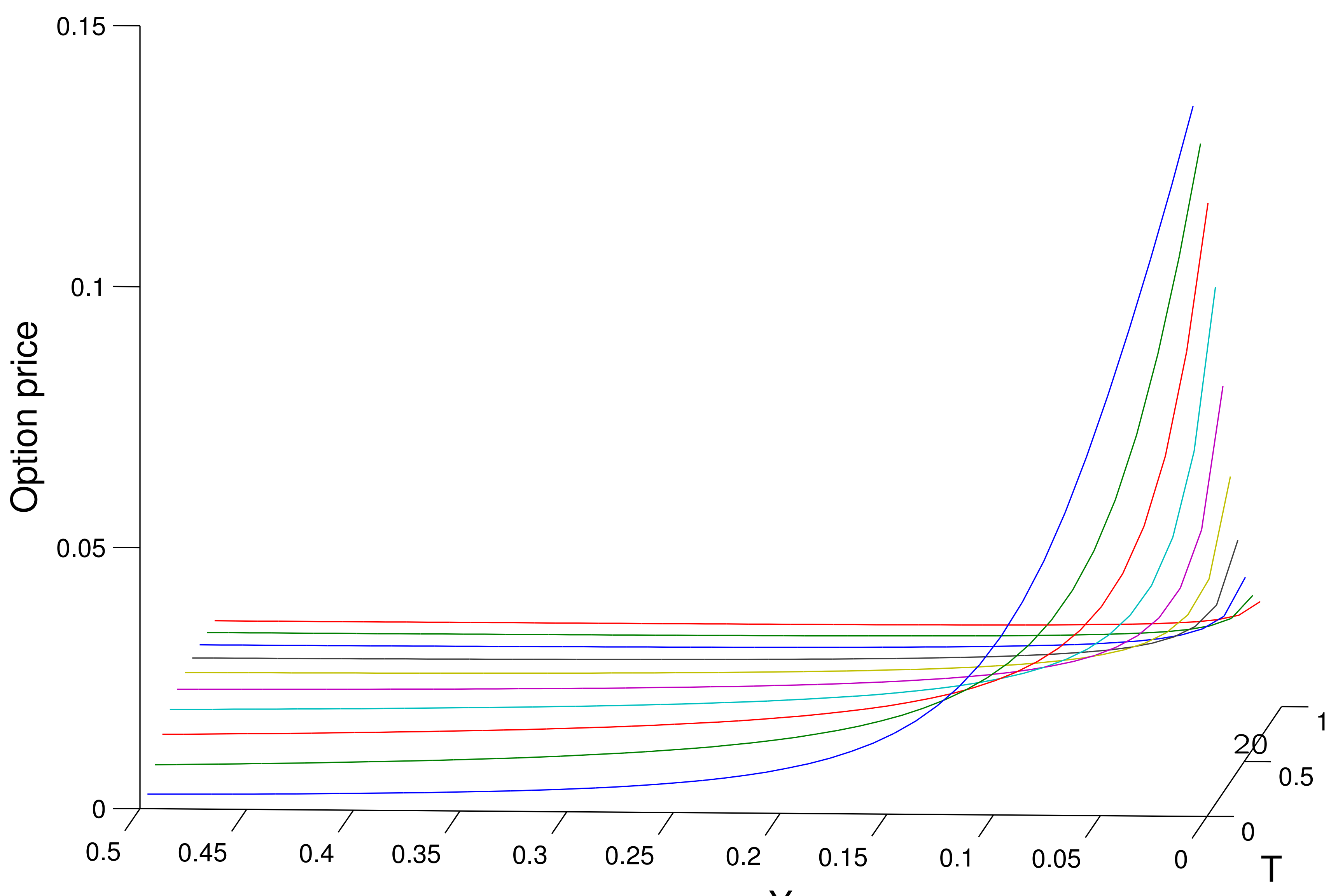
Resultados Numéricos

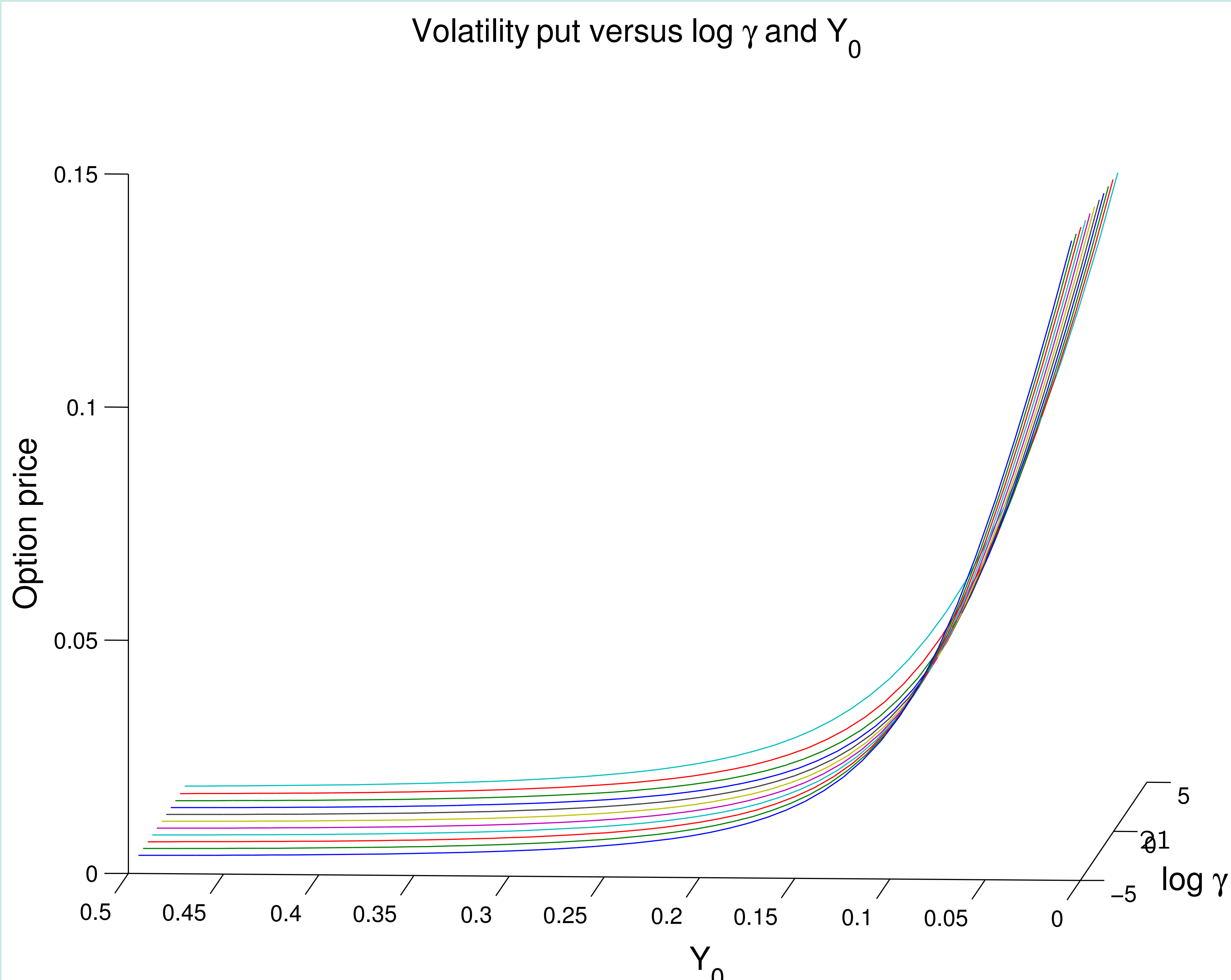
Tomemos os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} \alpha &= 5, \quad \beta = 0.04, \quad \kappa = 0.001, \\ \mu &= 0.04, \quad r = 0.02, \quad \rho = 0.5 \end{aligned}$$

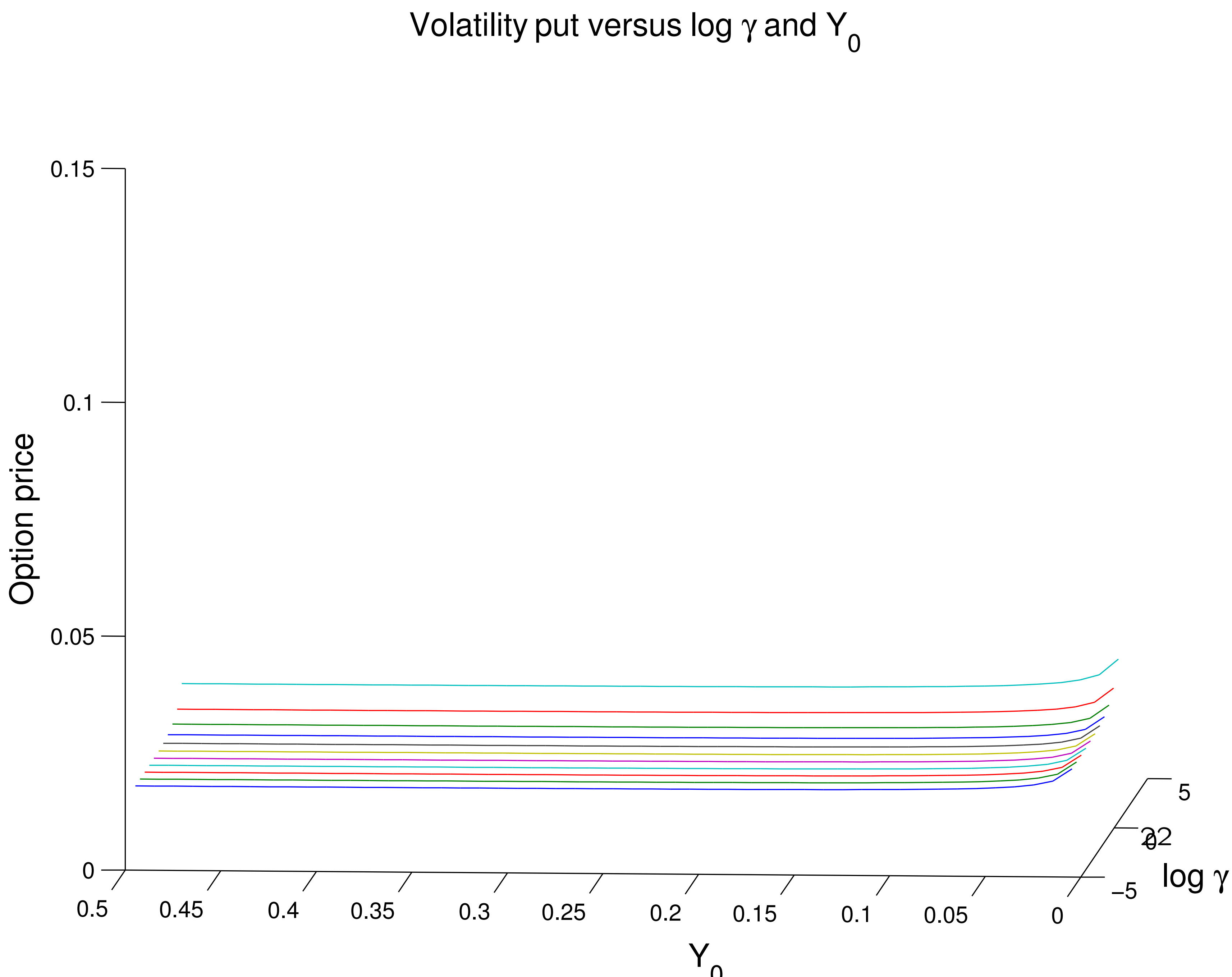
e o quadrado da volatilidade inicial no intervalo $[0, 0.5]$. Esses parâmetros levam a um processo de volatilidade com reversão a média ocorrendo em aproximadamente dois meses e uma distribuição de equilíbrio com valor esperado de aproximadamente 40%. Nos exemplos seguintes, calculamos o preço de uma opção de venda em volatilidade com valor terminal $(0.15 - \sigma_T^2)^+$. Quando não mencionado, o parâmetro de aversão ao risco é $\gamma = 1$.

Volatility put versus time to maturity and Y_0

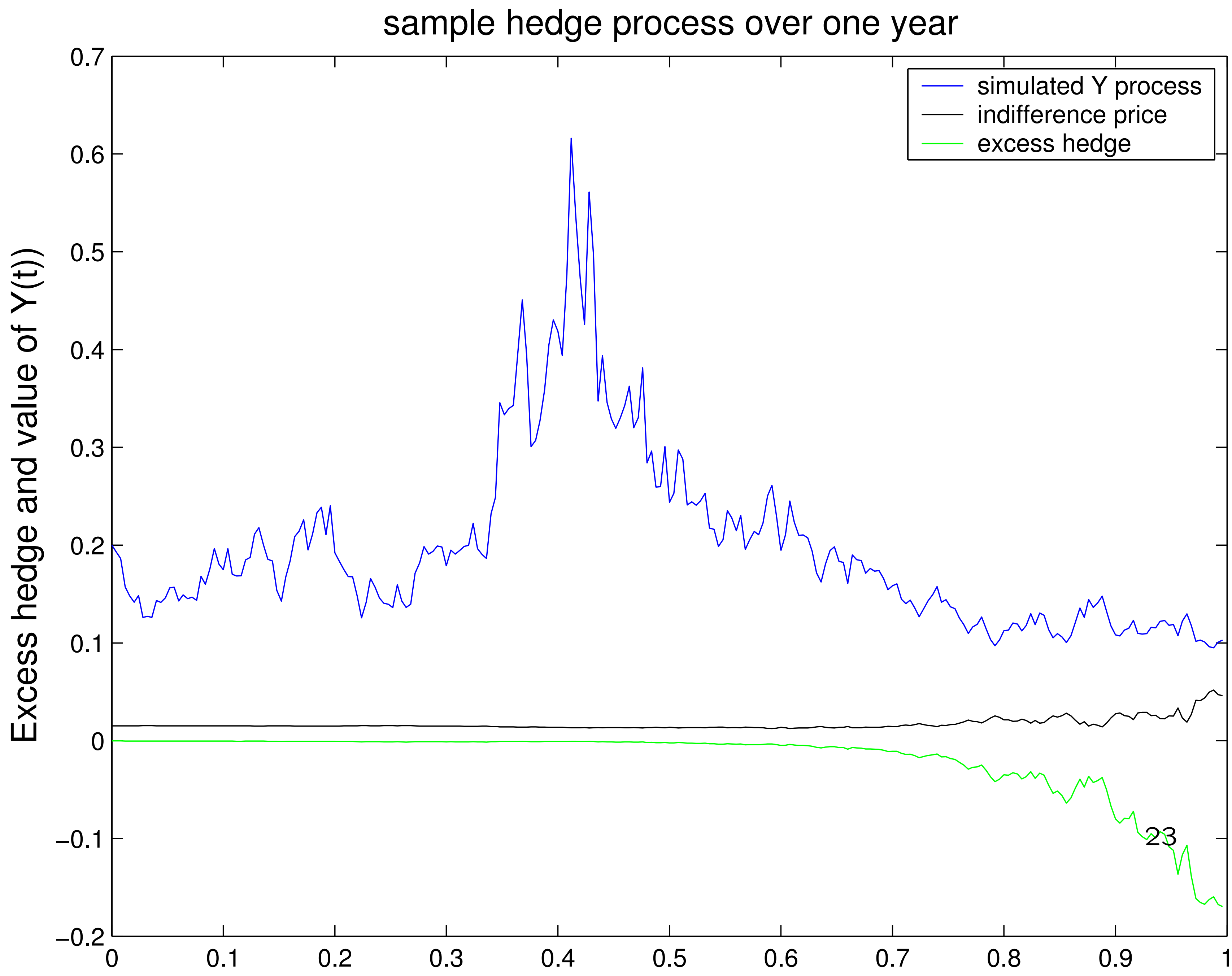




Volatility put versus log γ and Y0
Option price
0.15
0.1
0.05
0
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
Y0
5
−5
log γ



Volatility put versus log γ and Y_0
Option price
0.15
0.1
0.05
0
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
Y_0
5
2
0
−2
−5
log γ


sample hedge process over one year
Excess hedge and value of Y(t))
simulated Y process
indifference price
excess hedge
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

5. Contratos em Volatilidade Integrada

Suponha agora que $B = B(V_T)$. Tomemos $\sigma = \sqrt{Y_t}$, de forma que $\lambda_t = \frac{\mu - r}{\sqrt{Y_t}}$. Como vimos, o preço de indiferença é dado por

$$\pi_t^B = \frac{1}{\gamma(1-\rho^2)} \log \left(\frac{E_t^{\widetilde{Q}} \left[e^{\gamma(1-\rho^2)B(V_T)} e^{-\int_t^T \frac{(1-\rho^2)(\mu-r)^2}{2Y_s} ds} \right]}{E^{\widetilde{Q}} \left[e^{-\int_t^T \frac{(1-\rho^2)(\mu-r)^2}{2Y_s} ds} \right]} \right),$$

que pode ser calculado por simulação dos processos Y_t e V_t sob a medida de martingale minimal $\widetilde{Q}$.

Adotemos o modelo de Heston para volatilidade estocástica, ou seja, sob a medida histórica P, temos

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(\mu - r)dt + S_t\sqrt{Y_t}dW_t \\ dY_t &= \alpha(\kappa - Y_t) + \beta\sqrt{Y_t}[\rho dW + \sqrt{1-\rho^2}dZ] \\ dV_t &= Y_t dt \end{aligned}$$

Desta forma, obtemos a seguinte dinâmica sob $\tilde{Q}$:

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t\sqrt{Y_t}d\widetilde{W}_t \\ dY_t &= \alpha\left[\left(\kappa - \frac{\beta\rho(\mu - r)}{\alpha}\right) - Y_t\right] + \beta\sqrt{Y_t}[\rho d\widetilde{W} + \sqrt{1-\rho^2}dZ] \\ dV_t &= Y_t dt \end{aligned}$$

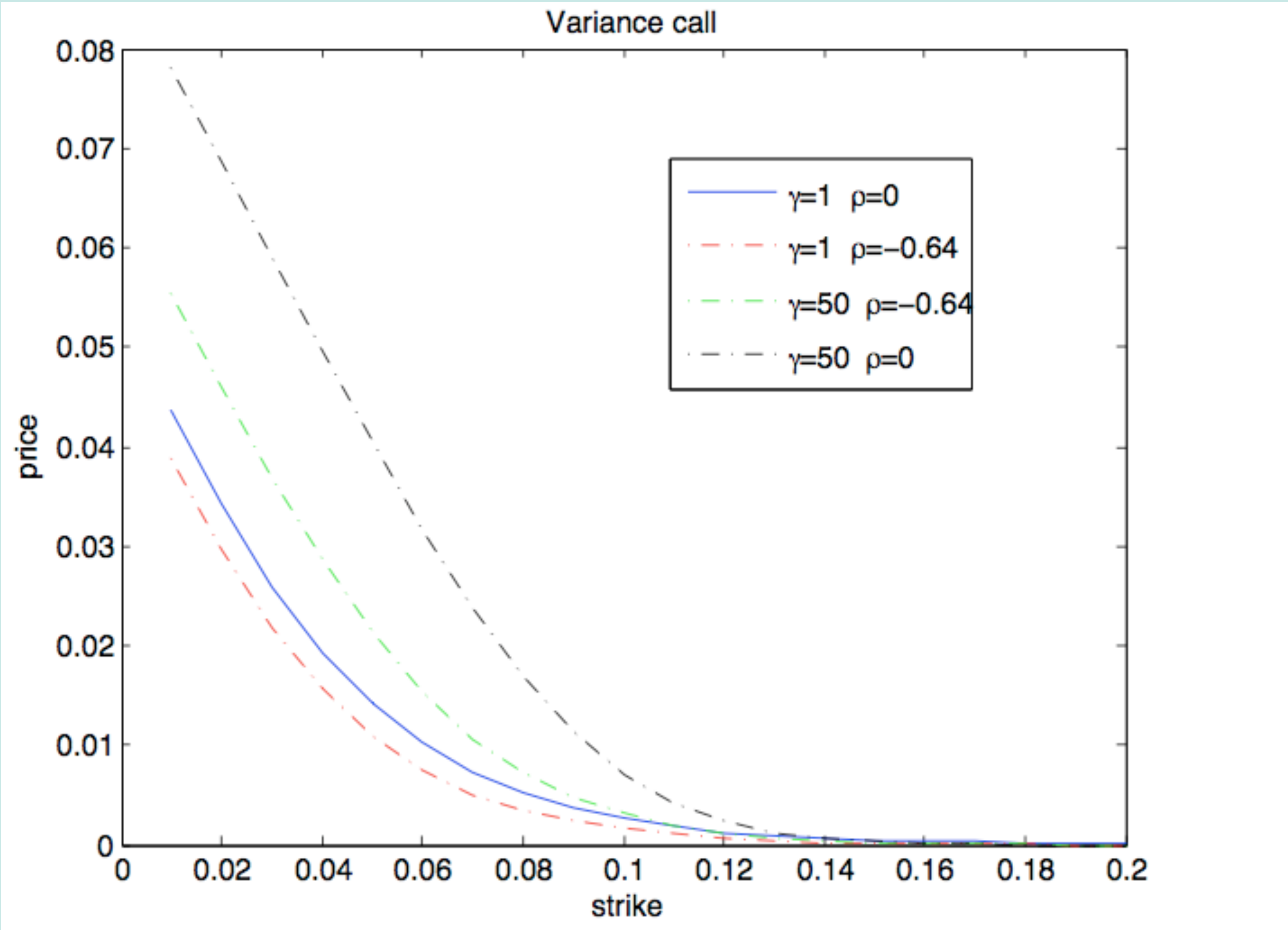
Resultados Numéricos

Calculamos os preços de indiferença do seguintes contratos:

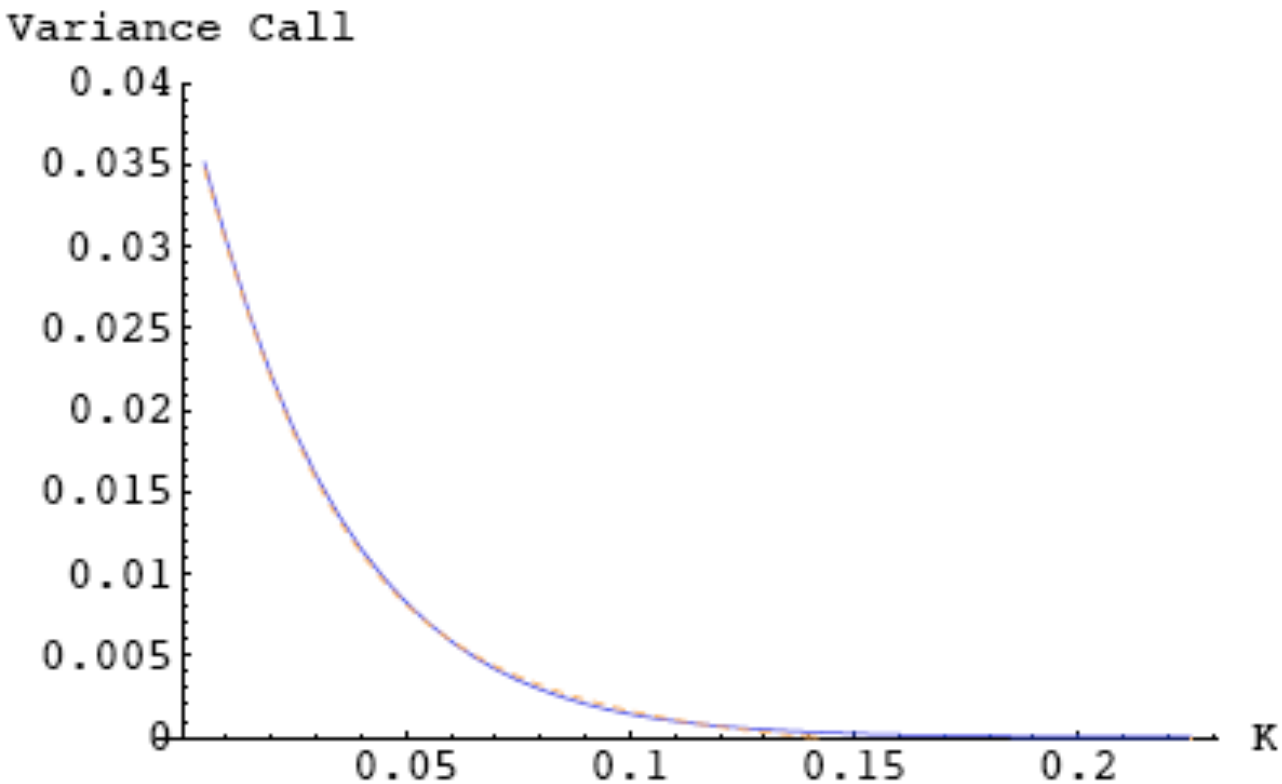
- Variance call: $B(V_T) = (V_T - K)^+$
- Variance swap: $B(V_T) = V_T$
- Volatility swap: $B(V_T) = \sqrt{V_T}$

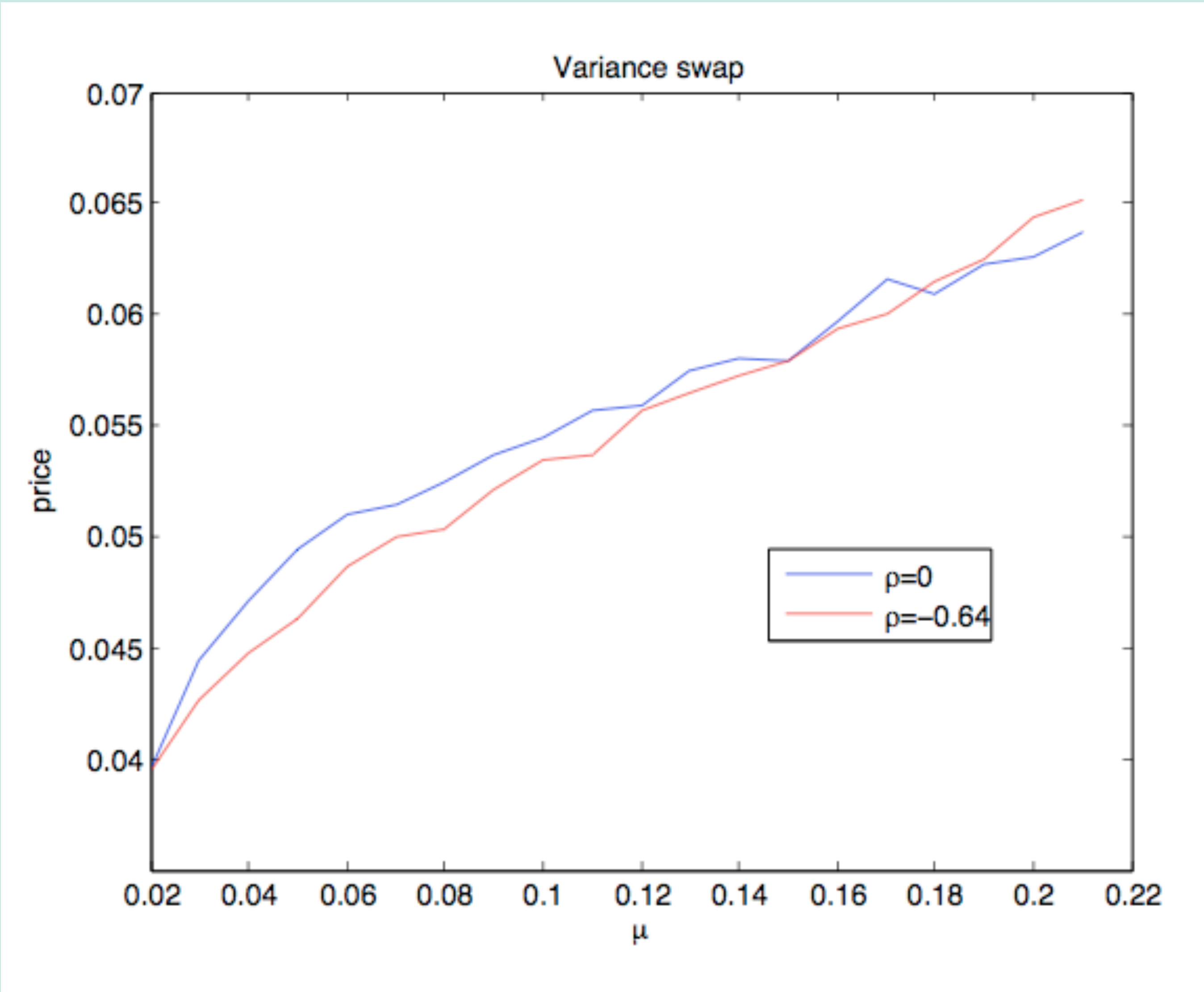
Utilizamos os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1.15, \quad \beta = 0.39, \quad \kappa = 0.04, \\ \mu &= 0.10, \quad r = 0.04. \end{aligned}$$



Variance call
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
price
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16
0.18
0.2
strike
γ=1 ρ=0
γ=1 ρ=−0.64
γ=50 ρ=−0.64
γ=50 ρ=0


Variance Call
0.04
0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
0.05
0.1
0.15
0.2
K


Variance swap
price
0.07
0.065
0.06
0.055
0.05
0.045
0.04
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16
0.18
0.2
0.22
μ
ρ=0
ρ=−0.64

6. Um modelo binomial para opcões reais

COnsidere um modelo de um período com $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ e probabilidades históricas $P\{\omega_i\} = p_i > 0$ tais que

$$
\begin{aligned}
S_T(\omega_1) &= uS_0, \qquad Y_T(\omega_1) = hY_0, \\
S_T(\omega_2) &= uS_0, \qquad Y_T(\omega_2) = \ell Y_0, \\
S_T(\omega_3) &= dS_0, \qquad Y_T(\omega_3) = hY_0, \\
S_T(\omega_4) &= dS_0, \qquad Y_T(\omega_4) = \ell Y_0,
\end{aligned}
$$

onde $0 < d < 1 < u$ e $0 < \ell < 1 < h$, para valores iniciais positivos S_0, Y_0.

Como antes, seja B um contrato que depende exclusivamente de Y. Se denotarmos

$$\begin{aligned} B_h &= B_T(\omega_1) = B_T(\omega_3) = B(hY_0) \\ B_\ell &= B_T(\omega_2) = B_T(\omega_4) = B(\ell Y_0), \end{aligned}$$

então seu preço de indiferença (com respeito a função de utilidade exponencial) é:

$$\begin{aligned} \pi^B &= -\frac{1}{\gamma}\left(q \log\left[\frac{e^{-\gamma B_h}p_1 + e^{-\gamma B_\ell}p_2}{p_1+p_2}\right] + \right. \\ &\qquad \left. (1-q)\log\left[\frac{e^{-\gamma B_h}p_3 + e^{-\gamma B_\ell}p_4}{p_3+p_4}\right]\right), \end{aligned} \tag{25}$$

onde

$$q = \frac{1-d}{u-d}.$$

Suponha agora que B é um contrato Americano. Claramente, exercício antes do vencimento ocorrerá sempre que

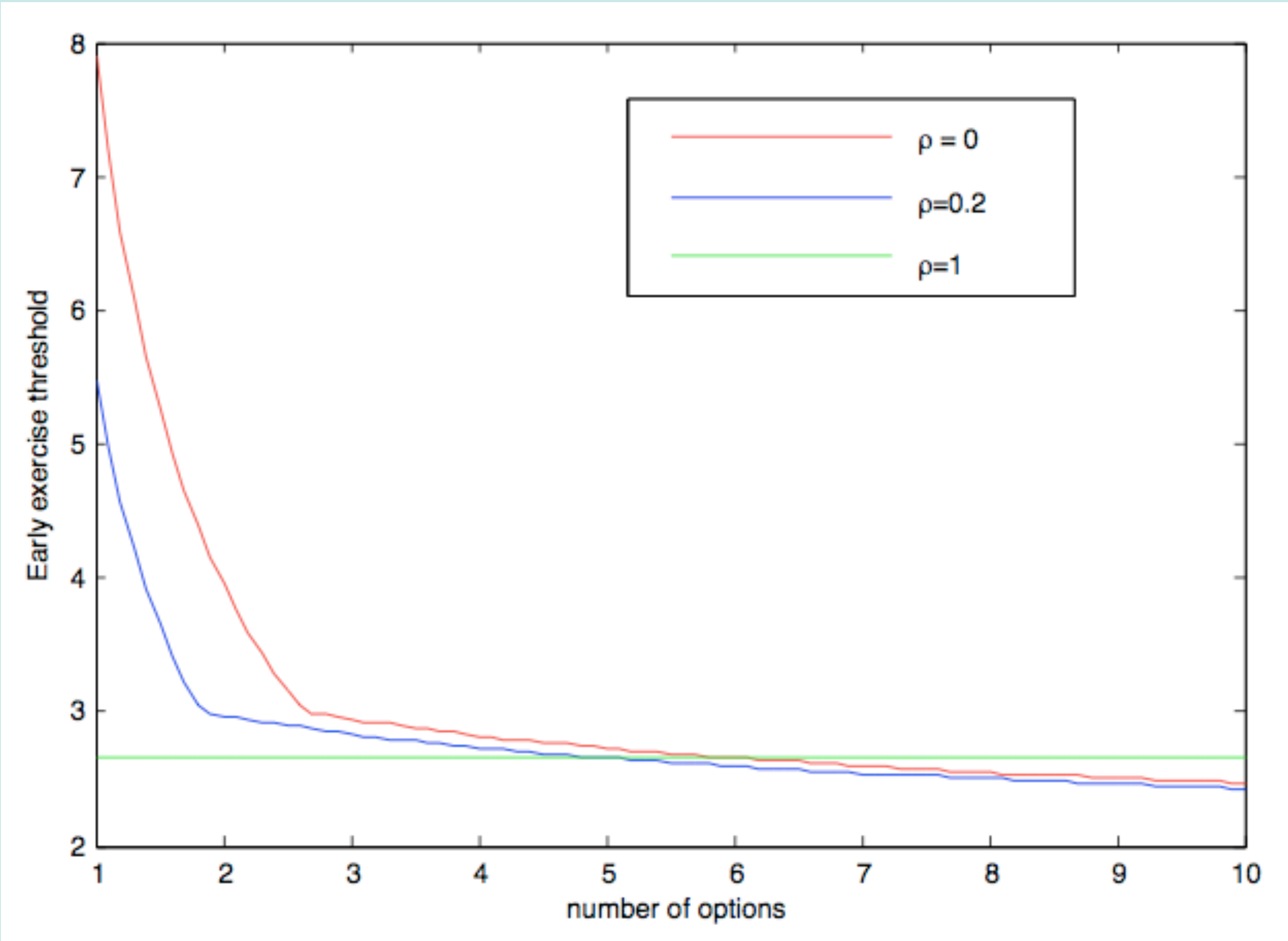
$$B(Y_0) \geq \pi^B,$$

onde π^B é o preço de indiferença (Europeu). Por exemplo, uma opção Americana de venda com preço de exercício K será exercida se Y_0 exceder a solução da equação

$$Y^* - K = \log \left[\left(\frac{p_1 + p_2}{e^{-\gamma B_h} p_1 + e^{-\gamma B_\ell} p_2} \right)^{\frac{q}{\gamma}} \left(\frac{p_3 + p_4}{e^{-\gamma B_h} p_3 + e^{-\gamma B_\ell} p_4} \right)^{\frac{1-q}{\gamma}} \right].$$

7. Contratos múltiplos

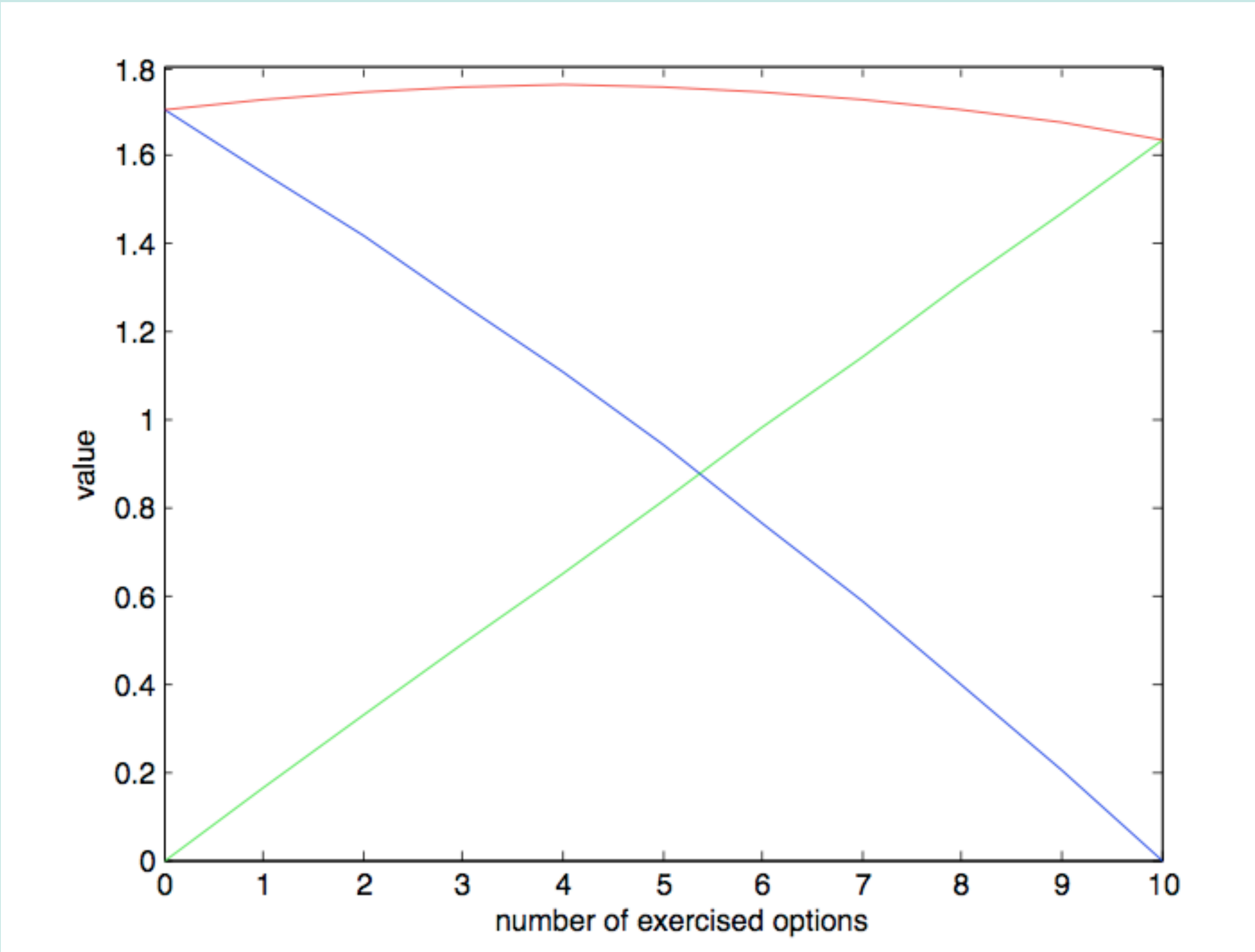
Decorre da aversão ao risco que o valor limite para o exercício antes do vencimento para uma opção Americana de venda obtido acima é diferente (e maior) que o valor limite para um contrato consistindo de A unidades idênticas da mesma opção.



8
7
6
5
4
3
2
Early exercise threshold
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
number of options
ρ = 0
ρ=0.2
ρ=1

Se for permitido exercício parcial, o número ótimo de opcões a serem exercidas é a solução a^* da equação

$$\max_a \left[a(Y_0 - K)^+ + \pi^{(A-a)B} \right]. \tag{26}$$


1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
value
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
number of exercised options

3. Multi-período: exercício inter-temporal

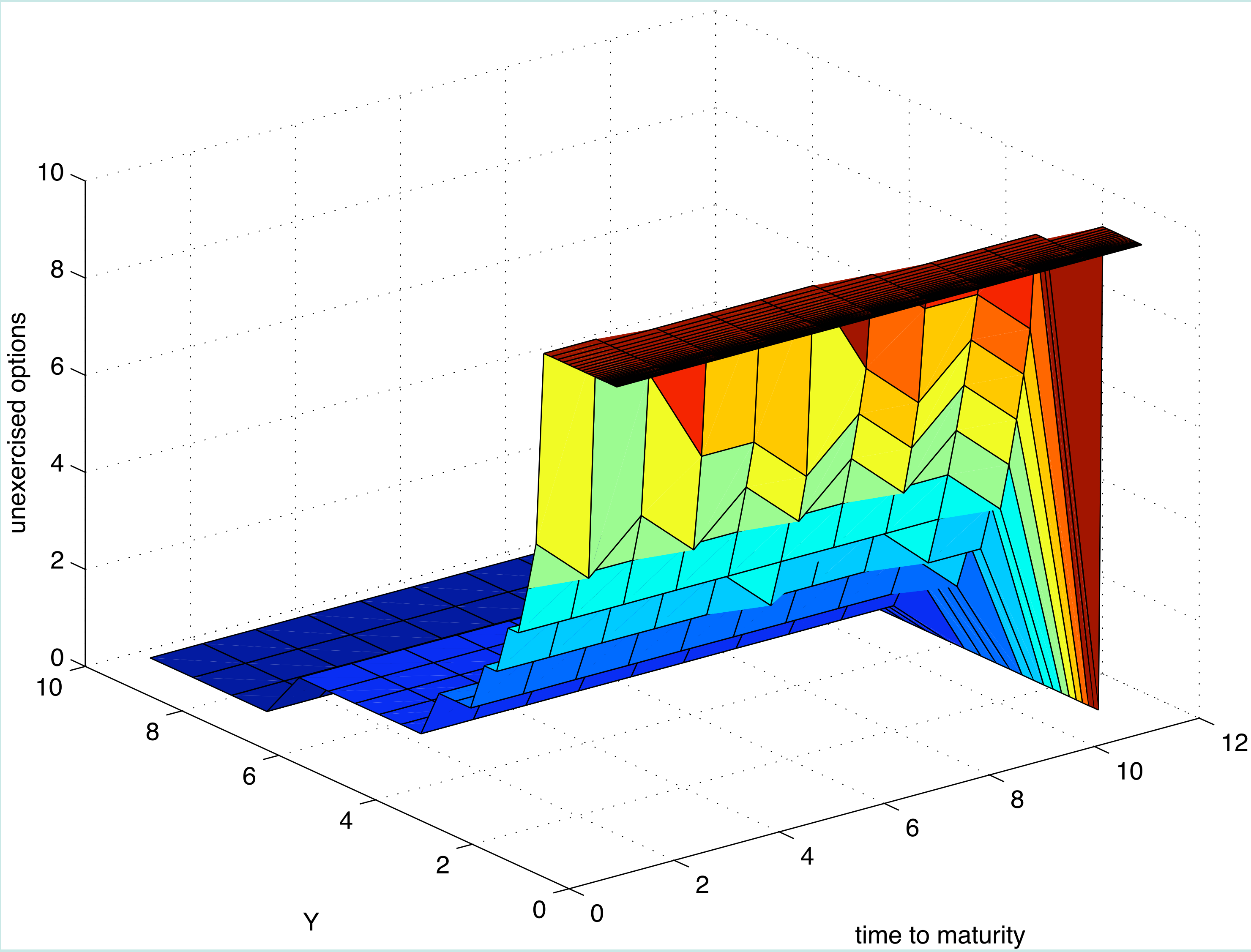
- Comece no período final.

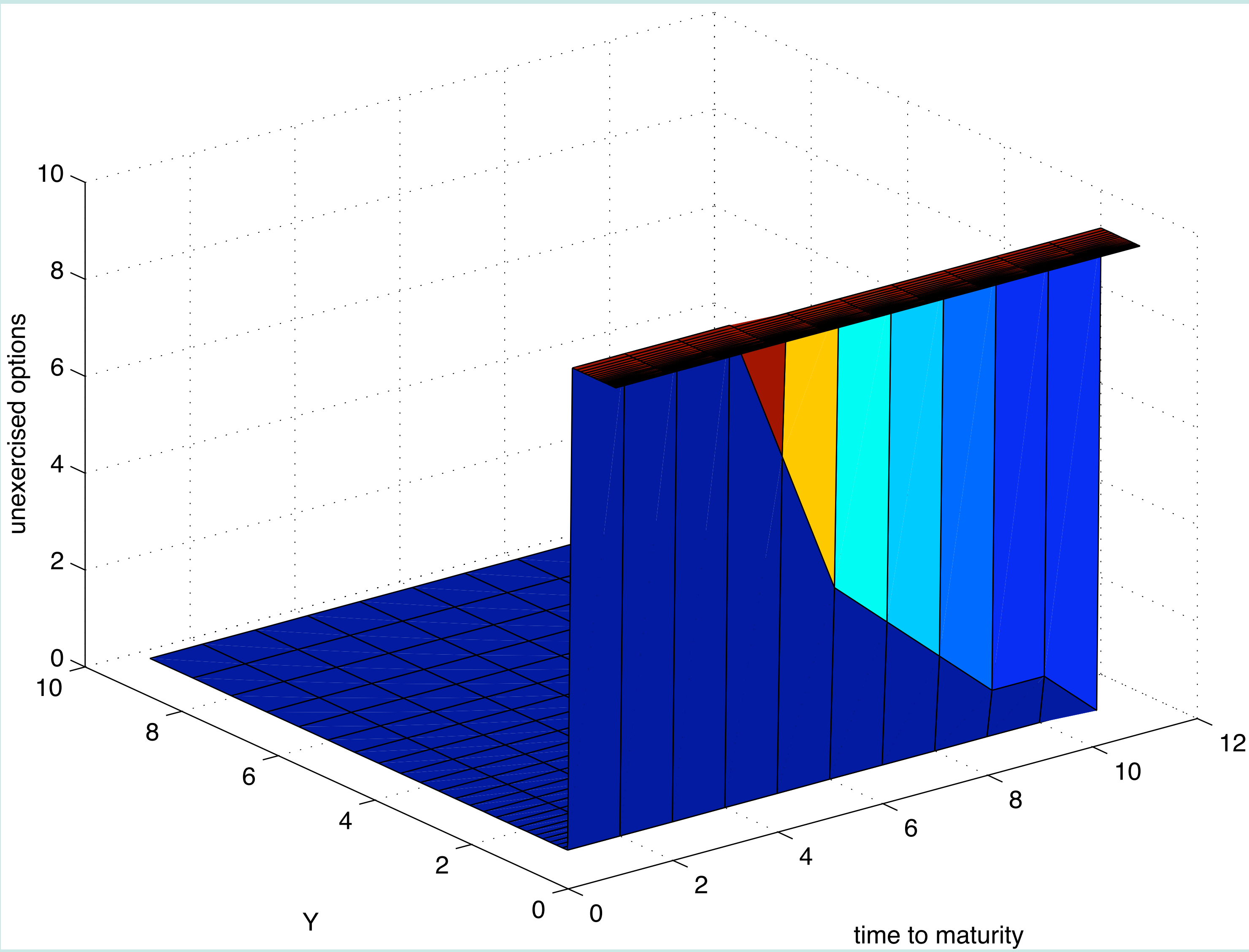
- Em cada ponto da árvore, calcule o preço de indiferença (Europeu) para diferentes valores $(A - a)$.

- Determine o máximo da equação (26).

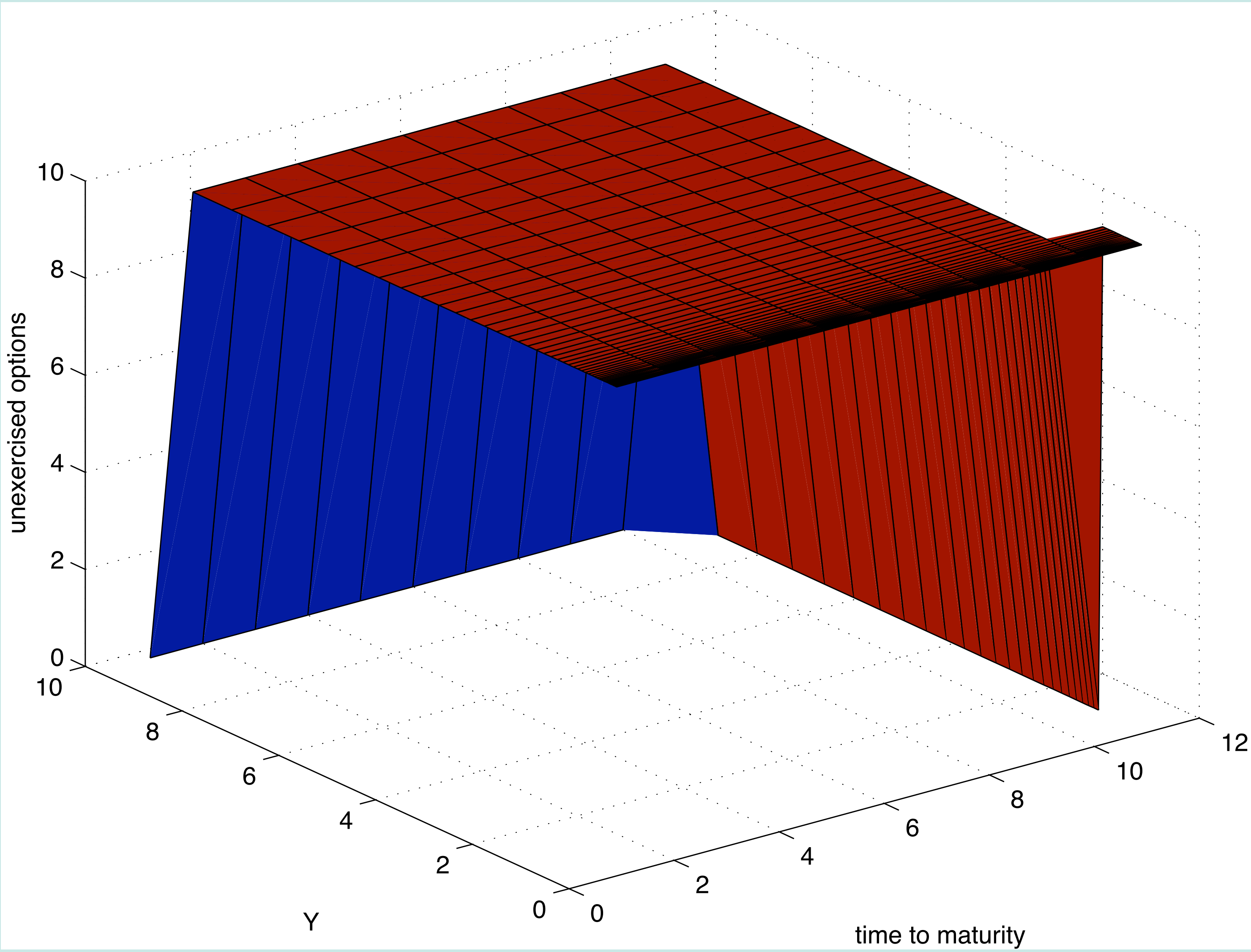
- Use esse valor como sendo a nova posição naquele ponto.

- Itere retroativamente.


unexercised options
10
8
6
4
2
0
10
8
6
4
2
0
Y
0
2
4
6
8
10
12
time to maturity



unexercised options
10
8
6
4
2
0
10
8
6
4
2
0
Y
0
2
4
6
8
10
12
time to maturity


unexercised options
0
2
4
6
8
10
Y
time to maturity
12