



Thèse
présentée par
Blaise BOURDIN
pour obtenir le titre de
DOCTEUR
de l'Université PARIS-NORD

Spécialité : Mathématiques

**UNE MÉTHODE VARIATIONNELLE EN MÉCANIQUE DE LA
RUPTURE, THÉORIE ET APPLICATIONS NUMÉRIQUES**

Thèse soutenue le 16 décembre 1998

Composition du jury :	L. AMBROSIO	Rapporteur
	Y. BRENIER	Président du jury
	H.D. BUI	Examinateur
	A. COHEN	Examinateur
	G.A. FRANCFORT	Directeur de thèse
	J.-J. MARIGO	Examinateur
	J.-M. MOREL	Rapporteur

Thèse préparée au sein du
Laboratoire des Propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux
(UPR CNRS 9001), Université Paris Nord

*À Corinne,
à ma famille.*

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier G. Francfort qui m'a soumis un sujet de recherche passionnant et formateur. Ses conseils ont été particulièrement enrichissants et il a su, au cours de ces trois années faire preuve de patience et d'attention, tout en me laissant une certaine liberté. J.-J. Marigo, par sa profonde compréhension du modèle étudié et sa culture mécanique a été l'initiateur de discussions passionnantes et extrêmement formatrices pour moi. Sa contribution à cette thèse a été importante et je l'en remercie. Je me dois aussi de citer R. Abdelmoula et F. Biltieryst avec lesquels j'ai eu des discussions constructives sur le modèle.

A. Chambolle a une connaissance et une compréhension profonde des outils et des méthodes de la théorie de la mesure géométrique. Le travail avec lui a été extrêmement enrichissant. Ses conseils et ses remarques ont été un atout précieux et je tiens à l'en remercier.

L. Ambrosio Y. Brenier, H. Bui, A. Cohen et J.-M. Morel ont accepté de me consacrer un peu de leur temps en rapportant sur cette thèse ou en acceptant de faire partie du jury. Je m'en sens honoré et je les en remercie chaleureusement.

Durant ces trois années, j'ai pu bénéficier au sein du LPMTM d'un environnement scientifique et matériel de qualité et je tiens à en remercier tous les membres et en particulier les membres successifs de sa direction.

Je tiens aussi à remercier G. Allaire, E. Bonnetier et F. Jouve pour leur soutien et leurs encouragements, ainsi que M. Bendsøe qui m'accueille actuellement au sein de son équipe.

Je souhaite aussi remercier ma famille et mes proches qui m'ont encouragé et supporté (le choix du terme n'est pas innocent!) toutes ces années, ainsi que M. Bourlet, G. Fisz, P. Lambert et H. Schiatti qui ont marqué ma scolarité et bien plus encore.

Enfin, je tiens à saluer la mémoire du Dr Roussel dont les qualités humaines restent pour moi un modèle.

UNE MÉTHODE VARIATIONNELLE EN MÉCANIQUE DE LA RUPTURE, THÉORIE ET APPLICATIONS NUMÉRIQUES

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude d'une méthode variationnelle en mécanique de la rupture, proposée par G.A. Francfort et J.-J. Marigo. Dans cette formulation, on associe à tout état de déformation et de fissuration d'un matériau, une énergie composée de deux termes. Le premier est l'énergie élastique classique, calculée sur la partie saine (non fissurée) du domaine alors que la seconde est proportionnelle à la surface (ou la longueur, en deux dimensions) de l'ensemble des fissures. On cherche alors à minimiser, pour toutes les fonctions cinématiquement admissibles pour le problème étudié et toutes les fissures, la somme des deux termes précédemment évoqués.

Ce problème de discontinuités libres, si l'on se limite à des mouvements anti-plans, est très proche d'une méthode de segmentation d'images, le problème de Mumford-Shah, qui a été étudié par l'école italienne et qui est le point de départ de cette thèse.

Dans un premier temps, l'existence de solutions au problème de mécanique de la rupture est établie, à l'aide d'une formulation faible, sur l'espace des fonctions spéciales à variations bornées (SBV). Puis, un problème approché est proposée et sa Gamma-convergence vers le problème de départ est prouvée. Ensuite, deux méthodes numériques sont proposées pour la résolution du problème de Mumford-Shah et leur mise en oeuvre est détaillée. Enfin, ces deux méthodes sont étendues au problème de mécanique. Des résultats numériques sont présentés et discutés, aussi bien dans le cadre de la segmentation d'images que dans celui de la mécanique de la rupture.

Mots clés : Γ -convergence — Discontinuités libres — Mécanique de la rupture — Optimisation — SBV — Segmentation d'images

A VARIATIONAL APPROACH FOR BRITTLE FRACTURE, THEORY AND NUMERICAL IMPLEMENTATION

Abstract

The subject of this thesis is to study a variational model proposed by G.A Francfort and J.-J. Marigo. In this formulation, one associates an energy, made of two parts to a displacement and a crack state of a material. The first part is equal to the elastic energy, computed at the places where the material is not cracked, while the second one is proportional to the crack area (or length in two dimensions). One then wishes to minimize the sum of both quoted terms for all kinematically admissible functions for the considered problem and all crack sets of the material.

This free discontinuities problem, in its antiplane formulation, is close to an image segmentation problem, the minimization of the Mumford–Shah functional, that has been studied by the Italian school. This problem is the starting point of this work.

In a first time, the existence of solutions to the brittle fracture problem is proved by the use of a weak formulation on the space of functions of bounded variations (SBV). Then, a regularized problem is formulated and its Gamma-convergence to the strong problem is established. Two numerical methods for its solving are proposed and their implementation is detailed. Finally, both methods are adapted to the brittle fracture problem. Some numerical experiments are presented and discussed both for the image segmentation and for the brittle fracture problem.

Keywords: Γ -convergence — Free Discontinuities Problems — Brittle Fracture — Optimization — SBV — Image Segmentation

Introduction

L'objet de la mécanique de la rupture est de déterminer l'évolution de la ou des fissures dans un milieu continu, en fonction du chargement auquel il est soumis. La mécanique de la rupture *fragile* se limite à l'étude de la fissuration des milieux continus *élastiques*. C'est dans ce cadre que la plupart des résultats existants ont été établis. Ces derniers, pour la plupart, reposent sur les idées de Griffith, basées sur une notion de bilan énergétique (on se référera à [Gri20] pour les détails de ce qu'il est maintenant convenu d'appeler la «théorie de Griffith»). Dans ce formalisme, on associe à toute fissure une énergie dite de surface, proportionnelle à sa longueur. Considérons alors un milieu élastique fissuré soumis à un chargement. Le postulat de Griffith est qu'il y a propagation de la fissure et donc accroissement de l'énergie de surface si ce dernier est strictement compensé par la décroissance d'énergie élastique causée par l'avancée de la fissure. Cette théorie est actuellement couramment utilisée, y compris dans un contexte industriel. Dans le cas de problèmes *quasi statiques*, comme le seront ceux étudiés ici, il peut s'interpréter en termes de *restitution d'énergie* et de dérivées premières de l'énergie surfacique associées aux fissures par rapport à leur longueur.

La faiblesse de cette théorie tient cependant à ce qu'elle est intrinsèquement limitée par les trois points suivants :

- i) la théorie de Griffith est fondamentalement inapte à «prédir» l'apparition de fissures;
- ii) la théorie de Griffith, à elle seule, ne permet pas d'estimer le trajet spatial des fissures;
- iii) la théorie de Griffith ne sait traiter de façon satisfaisante que des évolutions progressives de fissures.

Ces trois problèmes ont été étudiés par des méthodes différentes mais donnent

toujours lieu à de multiples controverses.

Le problème de l'amorçage est généralement résolu par l'introduction de *lois d'endommagement* qui d'un point de vue mécanique peuvent être assimilées à l'introduction de micro-fissures dans une zone bien précise du domaine. En plus du choix de la loi d'endommagement considérée, cette méthode suppose que l'évolution d'une fissure est dépendante de l'échelle. En effet, ces micro-fissures ne satisfont pas le critère de Griffith, qui en interdit même l'apparition. Ainsi, pour se donner les outils nécessaires à l'étude de l'apparition de fissures, il faut remettre en cause le critère de Griffith. Si la volonté de résoudre les points suivants requiert, elle aussi, d'abandonner ce critère, on voudrait s'efforcer de donner une formulation de la mécanique de la rupture fragile ne nécessitant pas l'utilisation de lois différentes à chaque échelle comme c'est habituellement le cas.

Comme on a pu le remarquer, le critère de Griffith ne prend en compte que les longueurs des fissures. Pour donner en plus leur trajet spatial, il faut introduire une deuxième loi : un *critère de branchement*. Plus précisément, il faut se donner *a priori* un type trajet de fissuration puis étudier l'évolution de la fissure à travers deux paramètres : l'angle et la longueur de propagation. Évidemment, le choix de ce critère de branchement donne lieu à d'âpres discussions et si des modèles sont proposés pour des cas particuliers de problèmes ou de matériaux, leur généralisation est encore largement ouverte. Enfin, les critères de branchement usuels limitent intrinsèquement l'éventail des trajets d'évolution possibles à des surfaces de classe C^1 par morceaux et éliminent donc d'office les comportements plus complexes que seraient des croisements, des dédoublement ou des fragmentations, par exemple.

Le troisième problème du critère de Griffith (incapacité à rendre compte d'évolutions brutales des fissures, ou de discontinuités de l'énergie surfacique, vue comme une fonction du chargement, en termes plus mathématiques) pose un dernier problème. En effet, il est possible de construire des exemples où l'inégalité fondamentale comparant l'accroissement des énergies surfacique et élastiques ne saurait être vérifiée. Ces exemples sont généralement qualifiés d'*instables*, ce terme masquant l'incapacité des méthodes usuelles à décider de l'évolution tant spatiale que temporelle des fissures. Pourtant, ce type d'évolution semble plus tenir de la règle que de l'exception.

Formellement, on peut dire que l'inconvénient majeur de la théorie de Grif-

fith est de ne pas laisser assez de liberté au développement spatio-temporel des fissures. Elle a néanmoins fait ses preuves et si l'on cherche une loi de fissuration nouvelle, il serait souhaitable que celle ci ne s'en écarte pas trop. Dans le modèle étudié ici, et proposé par G.A. Francfort et J.-J. Marigo (cf. [FM98]), on traite les fissures comme des surfaces de discontinuités et on rend compte de leur évolution par un critère énergétique. Ce modèle prétend donner des réponses aux trois restrictions évoquées plus haut.

L'introduction qui est faite ici ne se veut pas exhaustive et n'a pour but que de situer aussi précisément que possible le cadre de l'étude entreprise durant cette thèse. Pour une présentation plus complète du modèle, on se référera donc à [FM98]. L'idée de base reprend la notion originale de Griffith d'attribuer à une fissure une énergie de surface, fonction de sa longueur et repose sur la minimisation parmi tous les états de fissuration possibles de la somme des énergies surfaciques et élastiques d'un matériau. Pour ce faire, on suppose le matériau représenté par un domaine Ω ouvert, borné et suffisamment régulier (la régularité de Ω sera envisagée plus tard). On définit alors l'ensemble des *états de fissuration admissibles* comme l'ensemble des surfaces $K \subset \bar{\Omega}$ de mesure de Hausdorff $n - 1$ -dimensionnelle finie (on le notera dans ce qui suit $F_A = \{K \subset \bar{\Omega}; \mathcal{H}^{n-1}(K) < +\infty\}$). On définit alors une *densité d'énergie de surface* (ou ténacité), donnée par la fonction $\lambda : \bar{\Omega} \times S^{n-1} \rightarrow [0, +\infty]$ et on associe à toute surface K représentant un état de fissuration admissible l'énergie de surface donnée par

$$\mathcal{E}^S(K) = \int_K \lambda(x, \nu(x)) d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

où $\nu(x)$ représente la normale à K au point x . Pour tout chargement U et toute fissure K , on note $C_A(U, K)$ l'ensemble des *déplacements cinématiquement admissibles* (le chargement U restant à préciser). Pour tout $u \in C_A(U, K)$, on définit alors l'énergie de déplacement par

$$\mathcal{E}^D(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} W(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

où W désigne un *potentiel élastique*, autrement dit, une fonction strictement convexe et coercive en $\epsilon(u) = (\nabla u + \nabla u^T)/2$ (la notation $W(x, u(x), \nabla u(x))$

peut sembler étrange dans ce contexte où seules les propriétés de $\epsilon(u)$ interviennent, mais sera justifiée ultérieurement). Enfin, à tout état de fissuration et de déplacement d'un matériau (c'est à dire à tout couple $K \in F_A$, $u \in C_A(U, K)$), on associe la somme de ces deux énergies

$$\mathcal{E}(u, K) = \mathcal{E}^D(u, K) + \mathcal{E}^S(K).$$

Reste alors à placer cette énergie dans un cadre temporel. En effet, la rupture est par nature un phénomène évolutif qui s'accompagne d'un critère d'irréversibilité, l'impossibilité pour une fissure de disparaître, qui ne peut donc être modélisé indépendamment d'une notion de temps. On se limite cependant à l'étude de problèmes *quasi statiques*, c'est à dire que l'on considère que le système étudié est à tout temps dans un état d'équilibre. De plus, malgré l'existence d'une formulation en temps continu (cf. [FM98]), on se limitera à une loi d'évolution discrétisée en temps, qui se prête mieux à une mise en œuvre numérique. Dans ce cadre, on considère alors une suite croissante d'instants

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots$$

et on note U_i , u_i et K_i , les suites des chargements, des déplacements et des états de fissuration à ces instants. Alors, pour tout i , u_i et K_i vérifient le critère de minimisation d'énergie donné par

$$\mathcal{E}(u_i, K_i) = \inf_{\substack{K \in F_A \\ K \supset K_{i-1}}} \inf_{v \in C_A(U_i, K)} \mathcal{E}(v, K),$$

l'hypothèse de croissance au sens de l'inclusion ($K \supset K_{i-1}$) représentant le caractère irréversible du phénomène de fissuration.

Précisons enfin la nature des chargements envisagés. Une limitation du modèle est le fait de ne pouvoir prendre en compte que des conditions aux limites de déplacements imposés, ou de bord libre. En effet, vouloir imposer des forces volumiques reviendrait alors à la minimisation, à un mouvement de corps rigide près, de

$$\mathcal{E}(u, K) - \int_{\Omega} f u \, dx.$$

Le minimum de cette énergie est $-\infty$ et, sauf pour des ténacités bien choisies, est atteint, indépendamment de l'intensité de la force, en créant une fissure délimitant une partie de mesure non nulle de Ω , et en faisant tendre u vers l'infini dans cette

région. Ceci n'est pas acceptable d'un point de vue mécanique, et la prise en compte de forces, qu'elles soient surfaciques ou volumiques reste à l'heure actuelle un problème ouvert pour le modèle étudié. On se limitera donc à des problèmes de *déplacements imposés* et de *bord libre*. On définit pour cela deux sous-ensembles \mathcal{N} et \mathcal{D} de $\partial\Omega$ tels que $\mathcal{D} \cup \mathcal{N} = \partial\Omega$ et on impose alors les conditions $u = U$ sur \mathcal{D} et $\partial u / \partial n = 0$ sur \mathcal{N} , où U représente le chargement envisagé, et $\partial u / \partial n$, la dérivée normale du déplacement.

Ainsi formulé, le problème de mécanique de la rupture se classe dans la famille des problèmes dit de *discontinuités libres*. Il présente d'ailleurs de larges similitudes avec une méthode de segmentation d'images, le problème dit de Mumford et Shah. Ce dernier a fait l'objet d'efforts intenses de la part de l'école italienne de E. De Giorgi (citons, entre autres, L. Ambrosio, G. Bellettini, M. Carriero, A. Coscia, G. Dal Maso, A. Leaci, S. Solimini ou V.-M. Tortorelli), mais a aussi été étudié en France par A. Bonnet, A. Chambolle, F. Dibos, J.M. Morel ou E. Séré, pour ne citer qu'eux.

L'étude du problème de Mumford-Shah (et des théories mathématiques qui lui sont intimement liées) ainsi que sa mise en œuvre numérique ont représenté une part non négligeable de mon travail de thèse. Ces travaux ont donné lieu à la mise en œuvre numérique de deux méthodes de résolution et à la rédaction de deux articles qui forment les chapitres 3 et 4. De plus, le chapitre consacré au traitement mathématique du problème de mécanique de la rupture, précédemment évoqué suit fidèlement la voie tracée pour le problème de Mumford-Shah. C'est pourquoi il est nécessaire de présenter ce modèle avec précision et de rappeler les résultats qui ont ponctué son étude, ainsi que leur chronologie.

L'illustration suivante de la notion de segmentation d'images est empruntée à l'introduction de l'article de D. Mumford et J. Shah, [MS89] où le modèle a été proposé. On cherche à représenter, le plus fidèlement possible, une photographie sous la forme d'un dessin, c'est à dire de contours, séparant des zones de couleur relativement homogènes. En termes mathématiques, étant donnée une fonction $g \in L^2(\Omega; [0, 1])$, définie sur un ouvert borné Ω et deux réels positifs, α et β , on cherche un couple, constitué d'un ensemble de surfaces fermées $K \subset \Omega$ et d'une

fonction $u \in \mathcal{C}^1(\Omega \setminus K)$, minimisant l'énergie :

$$\int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \alpha \mathcal{H}^{n-1}(K \cap \Omega) + \beta \int_{\Omega} |f - g|^2 dx. \quad (1)$$

Cette méthode, qui peut être considérée comme une version continue et isotrope des approches énergétiques, introduites par D. Geman et A. Geman ([GG84]) ou A. Blake et A. Zisserman ([BZ87]), a été proposée en 1989, assortie des postulats suivants :

- i) Il existe au moins un couple (u, K) tel que $u \in \mathcal{C}^1(\Omega \setminus K)$, minimisant (1)
- ii) K est constitué d'une union finie de surfaces \mathcal{C}^1 ;
- iii) les composantes de K qui intersectent $\partial\Omega$ le font à angle droit ;
- iv) tout point de Ω est élément de 0, 1 ou 3 arcs (autrement dit, deux arcs ne peuvent se croiser ni se rejoindre en formant un angle différent de 180°) et en un point triple, les trois arcs forment des angles de 120° .

La preuve des deux derniers points a été établie par D. Mumford et J. Shah, sous l'hypothèse ii) ([MS89], théorème 2.1 p. 599).

Prouver l'existence de solutions est plus difficile. La dépendance en K , se prête mal à l'utilisation de méthodes de l'analyse fonctionnelle. En remarquant que supposer $u \in \mathcal{C}^1(\Omega \setminus K)$, c'est d'une certaine façon autoriser u à être discontinue le long de la surface K , il peut sembler naturel de substituer à la surface K , l'ensemble de points de discontinuité de la fonction u , alors définie sur un espace «plus grand» que \mathcal{C}^1 , autorisant les discontinuités.

Un exemple d'un tel espace fonctionnel est l'ensemble des *fonctions à variation bornée*, BV . L'introduction qui est faite ici de cet espace est loin d'être exhaustive et on se référera à [EG92] ou à [Giu84], ainsi qu'à [Fed69], pour une présentation complète des bases de la théorie de la mesure géométrique. Étant donné un ouvert Ω de \mathbf{R}^n et une fonction $f \in L^1(\Omega)$, on dit que $f \in BV(\Omega)$ si et seulement si

$$\sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi dx ; \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbf{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\} < \infty.$$

On définit alors la *mesure de variation* de f sur Ω par le théorème suivant :

Théorème de structure de BV .

Soit $f \in BV(\Omega)$. Alors, il existe une mesure de Radon $\|Df\|$ et une fonction $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\|Df\|$ -mesurable telles que $|\sigma(x)| = 1$, $\|Df\|$ -presque partout et

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbf{R}^n)$, on a

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi = - \int_{\Omega} \varphi \cdot \sigma d\|Df\|$$

On peut de plus montrer que pour tout ouvert U de Ω ,

$$\|Df\|(U) = \sup \left\{ \int_U f \operatorname{div} \varphi ; \varphi \in \mathcal{C}_c^1(U; \mathbf{R}^n), |\varphi| \leq 1, \operatorname{Support} \varphi \subset U \right\}.$$

Alors, par la propriété suivante, on montre que $Df = \|Df\| \llcorner \sigma$ est la *dérivée au sens des distributions* de f ,

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi dx = - \int_{\Omega} \varphi dDf.$$

Il est enfin possible de préciser la nature de Df à l'aide du théorème de décomposition de Lebesgue, d'où on déduit que

$$Df = D^a f + D^s f$$

où $D^a f = Df \llcorner \mathcal{L}^n$ représente la *partie absolument continue* de Df par rapport à la mesure de Lebesgue et $D^s f$, sa *partie singulière*. On remarque que si $f \in \mathcal{C}^1$, alors $D^a f$ coïncide avec la dérivée usuelle. C'est pourquoi, on fait couramment un abus de notation en notant ∇u , la partie absolument continue devant la mesure de Lebesgue d'une fonction de BV . C'est d'ailleurs cette notation qui sera employée dans tout ce qui suit.

La notion de dérivée d'une fonction à variation bornée étant définie, il reste alors à s'intéresser à ses éventuelles discontinuités et donc à ses propriétés *ponctuelles*. En effet, l'objectif de la formulation faible est de représenter la surface K de l'expression forte par un ensemble de discontinuités de f et pour ce faire, il faut définir une notion de *saut* et par là même, de *valeur en un point*. Remarquons que cet objectif est en contradiction avec l'habitude usuelle d'identifier une fonction et sa classe d'équivalence (au sens de la norme L^1 , par exemple). Donc, dans tout ce qui suit (et c'est d'ailleurs le parti pris dans [EG92] ou dans l'ensemble de la littérature sur les espaces du type BV), on n'identifie pas une fonction à sa classe d'équivalence. Soit donc une fonction $f \in BV(\Omega)$ et un point $x \in \Omega$. On dit que f admet un *représentant précis* en x s'il existe z tel que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{B(x,r)} |u(y) - z| dy}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0$$

On note alors $\tilde{f}(x) = z$ et on définit l'ensemble des *sauts de f*, S_f , comme l'ensemble des points de Ω où une telle propriété n'est pas vérifiée, le complémentaire dans Ω de l'ensemble des points de Lebesgue de f .

On peut alors définir pour toute fonction de BV , la fonctionnelle dite faible

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \beta \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \alpha \mathcal{H}^{n-1}(S_u \cap \Omega). \quad (2)$$

L'objectif est alors de montrer que la minimisation de cette fonctionnelle est équivalente (en un sens à préciser) à celle de Mumford-Shah.

Cet objectif est impossible si l'on se place dans l'espace BV . En effet, pour toute fonction $g \in L^2(\Omega)$, il existe une suite $g_n \in BV(\Omega)$ telle que $g_n \rightarrow g$ dans $L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}^{n-1}(g_n) = 0$ et $\nabla g_n = 0$ presque partout sur Ω . Alors l'infimum de E est égal à 0, *quelque soit g* et le problème est alors de peu d'intérêt. Un exemple de cette classe de fonction, en dimension 1, est la fonction de Cantor-Vitali. Pour tenter de se prémunir contre de tels comportements des minimisateurs de la fonctionnelle faible, il convient d'étudier plus finement la mesure de variation d'une fonction à variation bornée, ce que se propose de faire le théorème suivant :

Caractérisation des sauts d'une fonction BV .

Soit $u \in BV(\Omega)$ et $D^j f$ et $D^c f$ définies par

$$D^j f = D^s f \llcorner S_f$$

et

$$D^c f = D^s f \llcorner (\Omega \setminus S_f).$$

Alors, pour tout Borel $B \subset \Omega$, on a

$$D^j f(B) = \int_{B \cap S_f} (f^+(x) - f^-(x))(\nu_f(x)) d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

Dans ce théorème, f^+ et f^- désignent respectivement la *limite supérieure approximative* et la *limite inférieure approximative* de f au point $x \in \Omega$, définies par :

$$f^+(x) = \text{applimsup}_{y \rightarrow x} f = \inf \left\{ t ; \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{f > t\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0 \right\}$$

et

$$f^-(x) = \text{appliminf}_{y \rightarrow x} f = \sup \left\{ t ; \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{f < t\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0 \right\},$$

et $\nu_f(x)$, la normale à S_f , au point x qui est bien définie en dehors d'un ensemble de \mathcal{H}^{n-1} -mesure nulle, car S_f est $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$ rectifiable.

Pour se prévenir contre de tels comportements des minimisateurs de (2), on définit alors un sous ensemble de BV , l'ensemble des *fonctions spéciales à variation bornée*, SBV comme les fonctions de BV dont la dérivée Cantorienne, D^c est nulle, *i.e.*

$$SBV(\Omega) = \{u \in BV(\Omega); D^c u \equiv 0\}$$

On définit donc la fonctionnelle faible (2) sur l'espace $SBV(\Omega)$. C'est dans ce cadre qu'a été démontrée l'équivalence du problème faible et du problème de Mumford-Shah, simultanément par G. Dal Maso, J.M. Morel et S. Solimini, en dimension 2 ([DMMS92]) et par E. De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci ([DGCL89]). Dans ce dernier article, la méthode est la suivante : tout d'abord, on montre que les fonctions admissibles pour le problème fort, le sont aussi pour le problème faible, c'est à dire que si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega \setminus K)$, $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx < \infty$ et si $\mathcal{H}^{n-1}(K) < \infty$, alors $u \in SBV(\Omega)$, $S_u \cap \Omega \subseteq K$ et $E(u) \leq \mathcal{E}(u, K)$. Ensuite, on montre l'existence de minimisateurs de la forme faible, en utilisant les théorèmes de semi-continuité inférieure et de compacité de L. Ambrosio (cf. [Amb89] ou [Amb90]). Enfin, on montre que les minimisateurs du problème faible sont admissibles pour le problème fort, et que le minimum de E est inférieur à l'infimum de \mathcal{E} . La principale difficulté dans cette étape est de montrer un résultat de régularité sur l'ensemble des contours optimaux, à savoir que $\mathcal{H}^{n-1}(\overline{S_u} \setminus S_u) = 0$ ([DGCL89], lemme 5.2 p. 216), afin de pouvoir comparer $E(u)$ et $\mathcal{E}(u, \overline{S_u})$. Ces deux propriétés permettent alors de montrer l'existence de solutions au problème fort.

Notons enfin que le second postulat de D. Mumford et de J. Shah est toujours un problème ouvert, malgré de récentes avancées (citons, par exemple, [DMMS92], [DK91], [Dib94], [DS97], [Bon95] ou [Dav96]). La régularité des contours optimaux est un sujet délicat qui n'a pas été étudié lors de cette thèse.

Cette formulation faible, en s'affranchissant de la surface inconnue a alors permis d'envisager une mise en œuvre numérique. La voie en a été ouverte par L. Ambrosio et V.M. Tortorelli ([AT90] et [AT92]) qui ont proposé des approximations de la fonctionnelle de Mumford-Shah, par le biais de la notion de Γ -convergence de De Giorgi (cf. [DM93]). En particulier, dans [AT92] on introduit une seconde

variable v et deux paramètres $k_c, c > 0$ et pour tout $u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et tout $v \in \mathcal{C}^1(\Omega ; [0, 1])$, on définit la fonctionnelle

$$E_c(u, v) = \int_{\Omega} (v^2 + k_c)|\nabla u|^2 dx + \alpha \left(\frac{(1-v)^2}{4c} + c|\nabla v|^2 \right) + \beta|u - g|^2 dx. \quad (3)$$

Alors, la Γ -convergence dans L^2 de E_c vers (2) est prouvée quand $c \rightarrow 0$ et $k_c \ll c$. Un résultat du même type, pour une fonctionnelle définie sur des espaces de type éléments finis, mais néanmoins proche de (3) a alors été établit par G. Belletini et A. Coscia ([BC94]). Des mises en œuvre numériques, sur la base de [AT92] ont été effectuées par S. Finzi-Vita et P. Perugia ([FVP95]), T.J. Richardson et S.K. Mitter ([RM97]) et moi-même (chapitre 3). Citons enfin les approches de A. Braides et G. Dal Maso ([BDM97]), de A. Chambolle ([Cha95], [Cha98], [CDM99] et [BC98], reproduit dans le chapitre 4).

Le problème de Mumford-Shah a ensuite donné lieu à de multiples variantes. L. Ambrosio a montré des résultats de semi-continuité pour des fonctionnelles dépendant des sauts d'une fonction de SBV , plus générale que le seul terme $\mathcal{H}^{n-1}(S_u)$ ([Amb90]). M. Carriero et A. Leaci, eux, se sont intéressés à un problème proche où le terme $\int |u - g|^2 dx$ est remplacé par des conditions limites de type Dirichlet ([CL90]). La volonté de substituer au terme $\int |\nabla u|^2 dx$ une fonction du gradient symétrisé de u comme un potentiel élastique a conduit à la définition et à l'étude des espaces BD et SBD , définis comme les espaces BV et SBV , pour le gradient symétrisé (cf. [BCDM95], [BCDM98] ou [ACDM97]). L'étude de ces espaces est cependant loin d'être achevée.

Le modèle de Mumford-Shah maintenant présenté, recentrons nous sur l'objectif principal de cette thèse, l'étude et la mise en œuvre numérique de la formulation de la mécanique de la rupture, présentée plus haut.

Le cas le plus simple est le cas antiplan, à ténacité constante et le premier chapitre de cette thèse lui est entièrement consacré. L'étude présentée comprend un résultat d'existence pour le problème de minimisation associé et une régularisation, sur la base de la Γ -convergence. Enfin, dans le chapitre 5, sa mise en œuvre numérique est détaillée et des résultats numériques sont présentés.

On considère un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, on se limite à des déplacement scalaires et on suppose la fonction de ténacité constante ($0 < \lambda < \infty$). L'interprétation

mécanique d'un tel problème est l'étude d'un cylindre infini, de section Ω , repéré par (e_1, e_2) et de génératrice e_3 . Les seuls déplacements envisagés se font alors selon e_3 , indépendamment de la section choisie. Dans ce cas, on peut ramener l'étude du problème tridimensionnel à celle d'une section du cylindre considéré et on a

$$\mathcal{E}(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(K \cap \bar{\Omega}). \quad (4)$$

Pour une fonction w définie sur $\partial\Omega$, on cherche alors à minimiser E pour des fonctions vérifiant, $u = w$ sur une partie \mathcal{D} de $\partial\Omega$ et $\partial u / \partial n = 0$ sur $\mathcal{N} = \partial\Omega \setminus \mathcal{D}$. Ce problème est très proche de celui de Mumford-Shah, mais plus encore de la variante étudiée par M. Carriero et A. Leaci. On peut le considérer comme une extension du problème de [CL90] à des conditions aux limites mixtes. La différence la plus sensible entre ce problème et le problème de Mumford-Shah n'est en fait pas l'introduction de conditions aux limites de Dirichlet mais le fait qu'on cherche ici à prendre en compte des fissures (ou des contours, dans le contexte de la segmentation d'image) *jusqu'à la frontière* de Ω . Ceci demande une attention particulière, si l'on veut suivre la méthode utilisée pour la segmentation d'images.

Tout d'abord, pour établir une formulation faible dans SBV il convient de donner un sens à la notion de saut à la frontière d'un domaine. Remarquons en effet qu'on a défini l'ensemble des sauts d'une fonction de BV (et donc de SBV) comme étant le complémentaire *dans* Ω de l'ensemble des points de Lebesgue et que l'on n'est donc pas en mesure de donner un sens, dans $SBV(\Omega)$ à la notion de saut sur $\partial\Omega$.

Plutôt que de définir une notion de saut d'une fonction de SBV à la frontière de son domaine de définition, la solution employée par M. Carriero et A. Leaci est d'utiliser une extension U de w à \mathbf{R}^n tout entier (extension dont l'existence peut être établie pour des hypothèses de régularités appropriées sur w et $\bar{\Omega}$). On définit alors le problème faible comme étant la minimisation de $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{n-1}(S_u \cap \bar{\Omega})$ parmi les fonctions de $u \in SBV(\mathbf{R}^n)$ telles que $u = U$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Cette méthode ne peut s'appliquer directement dans le cas de conditions aux limites mixtes et nécessite donc d'être adaptée à notre problème.

Remarquons que si (u, K) minimise (4) alors $\partial u / \partial n = 0$ sur K , l'existence de la normale à K étant d'ailleurs assurée \mathcal{H}^{n-1} -presque partout par la rectifiabilité

de K . Ainsi, la condition limite de Neumann est vérifiée si $u = U$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \tilde{\Omega}$ et si $\mathcal{N} \subset K$. On modifie donc l'énergie de surface de (4) en ne la calculant pas sur \mathcal{N} . Pour tout $U \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$, on définit donc notre fonctionnelle forte dans le cas antiplan à ténacité constante, pour tout $K \subset \overline{\Omega}$ fermé et tout $u \in C^1(\Omega \setminus (K \cup \mathcal{N}))$ par

$$\mathcal{E}(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(K \setminus \mathcal{N})$$

et pour tout $u \in SBV(\mathbf{R}^n)$, on définit

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(S_u \cap (\overline{\Omega} \setminus \mathcal{N})).$$

Dans la section 1.2 du premier chapitre de cette thèse, l'existence de minimisateurs de la fonctionnelle forte \mathcal{E} pour une condition limite U donnée est établie sous certaines hypothèses de régularité de \mathcal{N} et de $\partial\Omega$. La méthode utilisée est similaire à celle employée dans [CL90], qui généralise celle de [DGCL89]. Après l'énoncé de quelques propriétés élémentaires de la fonctionnelle faible E dans la section 1.2.1, on prouve l'existence de minimisateurs de E pour la condition aux limites U (section 1.2.2). Ensuite, on montre dans la proposition 1.2.6 que si (u, K) est admissible pour \mathcal{E} et si $\mathcal{E}(u, K) < \infty$, alors $u \in SBV(\mathbf{R}^n)$, $S_u \subset K \cup \mathcal{N}$ et que $E(u) \leq \mathcal{E}(u, K)$. Enfin, dans la proposition 1.2.9, on montre que si u minimise E alors le couple $(u, \overline{S_u \setminus \mathcal{N}})$ est admissible pour \mathcal{E} et que $E(u) = \mathcal{E}(u, \overline{S_u \setminus \mathcal{N}})$. L'existence de minimisateurs du problème fort, pour la condition limite U est alors immédiate et est énoncée dans le théorème 1.2.10.

Dans la section suivante (1.3), on s'intéresse à une méthode d'approximation de la fonctionnelle faible, par des fonctionnelles définies sur des espaces plus réguliers.

On définit alors une régularisation E_c de E dépendant d'un paramètre c et on montre que dans les sections 1.3.2 et 1.3.3 que E_c Γ -converge vers E dans L^2 . Dans la section 1.3.4, on montre enfin l'existence des minimisateurs de E_c et la compacité de leur suite. Ces trois propriétés permettent de conclure que la suite des minimisateurs de E_c converge vers un minimisateur de E et que le minimum de E_c converge vers le minimum de E .

La fonctionnelle régularisée E_c utilisée dans cette partie est dérivée de celle proposée dans [AT92], adaptée en particulier à la prise en compte de conditions

limites. Comme dans ce dernier article, il est nécessaire d'introduire une seconde variable, v , destinée à représenter les sauts de u , d'une manière à préciser. On définit alors un domaine logique, $\tilde{\Omega}$ tel que $\Omega \Subset \tilde{\Omega}$ et on pose, pour tout $u \in W^{1,2}(\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}) \cap L^\infty(\tilde{\Omega})$ et tout $v \in W^{1,2}(\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}; [0, 1])$,

$$E_c(u, v) = \int_{\Omega \setminus \mathcal{N}} (v^2 + k_c) |\nabla u|^2 dx + \int_{\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}} c |\nabla v|_2 + \frac{(1-v)^2}{4c} dx$$

où $\tilde{\Omega}$ est un ouvert borné de \mathbf{R}^n contenant Ω .

L'étude d'un problème d'élasticité bidimensionnel et à plus forte raison tridimensionnel reste hors de portée d'un point de vue mathématique, essentiellement du fait du manque de résultats théoriques sur les espaces BD et SBD . Je me suis alors intéressé à un problème vectoriel modèle, où l'énergie volumique est une fonction du gradient du déplacement et non de son gradient symétrisé (d'où la notation $W(x, u(x), D u(x))$, évoquée au début de cette introduction). On considère alors des champs de déplacements vectoriels, $u : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Dans ce cadre, et conformément à [FM98], il convient d'ajouter des restrictions à l'ensemble des fissures et donc des fonctions admissibles. D'un point de vue mécanique, on cherche à éviter que les lèvres d'une fissure ne viennent à s'interpénétrer. En termes mathématiques, on ajoute une condition sur le saut des fonctions admissibles, à savoir qu'en tout point $x \in S_u$, on impose la condition $\langle u^+(x) - u^-(x), \nu_u(x) \rangle \geq 0$. Pour prendre en compte cette condition, on définit alors une fonction de ténacité par

$$\Phi(u, v, \nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } (v - u) \cdot \nu \geq 0; \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour les mêmes hypothèses sur u et K que dans le cas scalaire, la fonctionnelle forte est alors donnée par

$$\mathcal{G}(u, K) = \int_{(\Omega \setminus \mathcal{N}) \setminus K} W(D u) dx + \lambda \int_{K \cap \bar{\Omega} \setminus \mathcal{N}} \Phi(u^+(x), u^-(x), \nu_K(x)) d\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

où $\nu_K(x)$ représente la normale à K au point x et sa version faible, par

$$G(u) = \int_{\Omega \setminus \mathcal{N}} W(D u) dx + \lambda \int_{S_u \cap \bar{\Omega} \setminus \mathcal{N}} \Phi(u^+(x), u^-(x), \nu_u(x)) d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

On se limite de plus à des densités d'énergies W ne dépendant que de $D u$, convexes et coercives. Il est alors évident que les éventuels minimisateurs des problèmes fort et faible vérifient la condition de non interprétation.

Dans la section 2.2, on établit la semi-continuité de la partie énergie de surface de la fonctionnelle faible, en montrant que Φ vérifie une propriété proche de la biconvexité régulière, au sens d'Ambrosio (cf. [Amb90], théorème 3.6 p. 311). De là, on peut facilement déduire la semi-continuité de G et donc l'existence de minimisateur, pour une condition limite donnée.

Régulariser cette fonctionnelle faible par une méthode similaire à celle employée dans le premier chapitre pose alors un problème. En effet, si l'on utilise les notations introduites dans le cas scalaire, si localement u_c converge vers une fonction u donc le saut est négatif (*i.e.* telle que $\langle u^+ - u^-, \nu_u \rangle < 0$) alors on doit avoir $G_c(u_c, v_c) \rightarrow \infty$ alors que cette limite doit être finie dans le cas contraire. Il convient alors de donner un critère sur u_c permettant d'estimer le signe de son saut. Ceci est encore à l'étude. Dans ce qui suit, on se limitera à construire une fonctionnelle G_c , pour une énergie de surface similaire à celle du cas scalaire, donc sans prise en compte de l'interpénétration. Enfin, l'objectif de la section 2.3 est surtout de montrer comment déduire un résultat de Γ -convergence d'un problème vectoriel en utilisant une méthode de section permettant de se ramener à un cas scalaire. Le problème modèle qui y est étudié est donc induit par la fonctionnelle faible

$$G(u) = \int_{\Omega} |D u|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(S_u \cap (\bar{\Omega} \setminus \mathcal{N}))$$

et sa régularisation par Γ -convergence, définie pour tout $u \in W^{1,2}(\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}) \cap L^\infty(\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N})$ et tout $v \in W^{1,2}(\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}; [0, 1])$ par

$$G_c(u, v) = \int_{\Omega \setminus \mathcal{N}} (v^2 + k_c) |D u|^2 dx + \int_{\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}} c |\nabla v|^2 + \frac{(1-v)^2}{4c} dx. \quad (5)$$

Cette étude conclut enfin la première partie consacrée à l'étude théorique du problème de mécanique de la rupture.

Les chapitres 3,4, et 5 reprennent trois articles rédigés pendant cette thèse. Le premier à été accepté par la revue *Modélisation Mathématique et Analyse*

Numérique et est en attente de publication. Les deux suivants ont été soumis respectivement à *Numerische Mathematik* et à *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. Le propos essentiel de ces trois articles est de décrire les méthodes numériques utilisées, dans le cadre du problème de Mumford-Shah pour les deux premiers et pour le problème de mécanique de la rupture, pour le dernier.

La mise en œuvre numérique de ces deux problèmes est délicate. Les fonctionnelles considérées ne sont ni convexes ni linéaires et l'unicité des minimisateurs n'est pas assurée. De plus, la méthode de régularisation par Γ -convergence ne permet pas de donner une estimation d'erreur entre les minimisateurs de la fonctionnelle régularisée et ceux de la fonctionnelle faible.

Sur le plan numérique, au moins trois codes de calcul devaient être développés : un pour le problème de Mumford Shah, un pour la mécanique de la rupture dans le cas antiplan et un troisième pour le problème d'élasticité plane. Ceci sans pouvoir s'appuyer, au sein du laboratoire, sur un programme déjà existant, ou sur une bibliothèque suffisamment ouverte. Ma première tâche, du point de vue numérique, a été de développer une bibliothèque d'éléments finis, fiable et performante, permettant de se focaliser dans chaque programme sur l'algorithme en tant que tel et non sur les détails des méthodes d'éléments finis employées. Cette bibliothèque a été réalisée en utilisant de façon intensive les possibilités du langage FORTRAN 90 et en définissant des structures de données adaptées aux éléments finis. Cette première phase achevée, l'écriture des codes de calculs ainsi que leur maintenance ont été grandement simplifiées, toute amélioration de la bibliothèque de base étant automatiquement répercutée dans les programmes concernés. Notons que cette approche est similaire à la tendance actuelle de mettre en œuvre les problèmes d'éléments finis à travers des langages ou des bibliothèques de haut niveau, généralement développées en C++.

Une difficulté supplémentaire provient du fait que le modèle utilisé prétend pouvoir donner des réponses à des problèmes insolubles par les autres méthodes. Par conséquent il est généralement impossible de comparer les résultats obtenus avec ceux de la littérature. Ceci requiert alors une attention particulière, tant au point de vue théorique que numérique. Une erreur commise lors de l'étude ou de la mise en œuvre du problème pouvant être dans ce cadre très délicate à détecter. La programmation se doit d'être effectuée rigoureusement car si dans le cas antiplan,

un problème modèle d'arrachement d'une fibre peut-être résolu exactement, et peut ainsi servir de problème test, dans le cas plan, cela n'est pas possible. On peut mettre en évidence une éventuelle contradiction avec les propriétés des fissures énoncées dans [FM98] ou se fier à son intuition pour détecter un éventuel résultat erroné, mais rien ne permet d'affirmer la véracité d'un calcul.

Dans le chapitre 3, la mise en œuvre numérique d'une méthode basée sur la fonctionnelle régularisée proposée dans [AT92] est décrite. Ce premier travail numérique a été considéré comme un cas modèle, dont le but était de valider des méthodes numériques afin de pouvoir les utiliser ensuite dans des problèmes de mécanique. C'est pourquoi l'approche proposée est différente des méthodes usuelles. Les problèmes de traitement d'image sont généralement résolus au moyen de méthodes de différences finies, parfaitement adaptées à des calculs sur une image, où des données régulièrement espacées, les pixels, sont définies sur un domaine rectangulaire. Dans l'optique d'une évolution vers le problème de mécanique de la rupture, et donc pour des domaines plus généraux, c'est une méthode d'éléments finis qui a été utilisée.

On définit pour tout $u \in V_h(\Omega)$ et $v \in V_h(\Omega; [0, 1])$,

$$E_{c,h}(u, v) = \int_{\Omega} (v^2 + k_c)|\nabla u|^2 + \alpha \left(\frac{(1-v)^2}{4c} + c|\nabla v|^2 \right) + |u - \pi_h(g_c)|^2 dx \quad (6)$$

où $V_h(\Omega)$ représente un espace de fonctions continues et affines par morceaux, définies sur une triangulation de Ω , caractérisé par une finesse h et π_h l'opérateur de projection de Lagrange sur cet espace. La fonction g_c est une approximation de g vérifiant $g_c \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\|g_c\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ et $\|\nabla g_c\|_\infty \leq C/c$ où C est une constante strictement positive.

Cette fonctionnelle peut être vue comme la projection de celle proposée par L. Ambrosio et V.M. Tortorelli dans [AT92]. On montre que si $h \ll k_c \ll c$, $E_{c,h}$ Γ -converge vers la fonctionnelle de Mumford-Shah. Ce travail est inspiré des résultats de G. Bellettini et A. Coscia ([BC94]) qui prouvent un résultat du même type, pour une autre variation de la fonctionnelle (3).

L'avantage de la fonctionnelle de [AT92], ainsi que de celle proposée dans ce chapitre, sur celle de L. Bellettini et A. Coscia tient au fait que la contrainte $v \in [0, 1]$ est automatiquement satisfaite pour ses minimisateurs, ce qui n'est pas

le cas de cette dernière. Ceci est très important dans le cadre numérique et réduit de manière significative le temps de calcul.

Pour donner une approximation numérique des solutions du problème de Mumford-Shah, on fixe le paramètre de régularisation c , on construit un maillage de finesse h et on minimise la fonctionnelle $E_{c,h}$. La minimisation de $E_{c,h}$ n'est pas sans poser de problèmes. En effet, cette fonctionnelle n'est ni convexe ni linéaire, et ses minimiseurs ne sont pas nécessairement uniques. La méthode alors employée est d'effectuer des minimisations alternées selon les directions privilégiées (u, \cdot) et (\cdot, v) , en choisissant un point de départ (u_0, v_0) arbitraire. En remarquant que pour u ou v fixés, la fonctionnelle (6) est convexe et quadratique, chaque problème peut alors se résoudre par une méthode d'éléments finis classique. Notons que cette méthode est très proche de celle développée simultanément par S. Finzi Vita et P. Perugia ([FVP95]).

Une méthode de décomposition de domaine est proposée. On divise Ω et plusieurs sous domaines Ω^i disjoints et on cherche sur chaque Ω^i , les minimiseurs (u^i, v^i) de (6). En toute rigueur, cette méthode n'assure pas la continuité des champs u et v à la frontière des domaines, mais le couple ainsi calculé permet alors de reconstituer un point de départ (u_0, v_0) pour l'algorithme évoqué plus haut. Cette stratégie de minimisation, d'abord sur des sous domaines puis sur le domaine entier permet de diminuer le temps de calcul.

Des résultats numériques illustrent les propriétés de résistance au bruit, qu'il soit aléatoire ou périodique et au flou. De plus, une méthode d'ajustement des paramètres α , β et h permettant de contrôler les déformations des bords, énoncées par D. Mumford et J. Shah est étudiée et des exemples présentés.

Dans le chapitre 4, une autre approche numérique du problème de Mumford-Shah est proposée. La méthode utilisée s'inspire d'une régularisation présentée dans [CDM99] par A. Chambolle et G. Dal Maso. Dans ce dernier article, la fonctionnelle de Mumford-Shah est approximée au sens de la Γ -convergence par une fonctionnelle G_ε définie sur un espace de type éléments finis. On définit un angle critique $0 < \theta_0 \leq 60^\circ$, un rapport critique $k \geq 6$ et un ensemble $\mathcal{T}_h(\Omega)$ de triangulations telles que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

- i) la longueur des arêtes de T est comprise entre h et kh ;

ii) les angles de T sont supérieurs ou égaux à θ_0 .

Alors, pour tout $u \in V_h(\Omega)$ et $T \in \mathcal{T}_h$, la fonctionnelle suivante est définie dans [CDM99] :

$$G_h(u, \mathbf{T}) = \sum_{T \in \mathbf{T}} |T \cap \Omega| \frac{1}{H_T} f(H_T |\nabla u_T|^2) + \int_{\Omega} |u - g|^2 dx, \quad (7)$$

où H_T désigne la plus petite hauteur d'un élément T , ∇u_T , la valeur de ∇u sur ce même élément et où f est telle que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 1$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_\infty < \infty$. Il est prouvé dans [CDM99] qu'il existe un angle Θ tel que si $\theta_0 \leq \Theta$, alors la fonctionnelle (7) Γ -converge dans L^2 vers la fonctionnelle faible de Mumford-Shah (2), quand $h \rightarrow 0$.

Dans un premier temps, c'est cette fonctionnelle qui à été utilisée. Comme dans le chapitre précédent, on se donne alors une valeur de h , jugée suffisamment petite et on minimise la fonctionnelle G_h . La difficulté, dans cette formulation est que la triangulation T est l'une des inconnues. Contrairement aux problèmes classiques où l'on se donne un maillage sur lequel on résout un problème, on cherche ici la fonction u affine par morceaux minimisant G_h , *ainsi que la triangulation* qui lui est associée. La méthode proposée pour minimiser G_h repose sur l'étude de la suite réalisant la Γ -limite supérieure : pour tout $u \in L^2(\Omega)$, on sait construire une suite (u_h, \mathbf{T}_h) telle que u_h converge dans L^2 vers u et on a une description de \mathbf{T}_h , en fonction de u . Ainsi, connaissant une solution du problème de Mumford-Shah, on a une description de la suite des triangulations optimales. Ce minimum étant évidemment inconnu lors de la résolution du problème, on se propose de déduire d'un minimum approché de la fonctionnelle G_h , une triangulation «presque optimale». La méthode utilisée est donc de se donner un maillage de départ arbitraire, de minimiser G_h pour \mathbf{T} fixé, puis de *raffiner* le maillage, à l'aide d'un remailleur. La minimisation de G_h selon u , quant à elle est effectuée itérativement par une méthode de dualisation, classique en traitement d'images par des méthodes variationnelles. L'algorithme numérique est donc à nouveau une méthode de minimisation alternées selon les directions (u, \cdot) et (\cdot, \mathbf{T}) . Notons cependant qu'on ne prétend pas minimiser G_h selon la variable \mathbf{T} , mais seulement construire une suite $(u_i, \mathbf{T}_i)_i$ telle que $(G_h(u_i, \mathbf{T}_i))_i$ soit décroissante.

Cette méthode est très performante d'un point de vue numérique. En effet, la phase d'adaptation du maillage permet de réduire à chaque itérations le nombre

d'inconnues du problème en u qui est un paramètre crucial pour le temps de calcul. Cependant, la fonctionnelle G_h s'est révélée être peu stable et présenter une faible résistance au bruit. Une variante, inspirée des travaux de A. Braides et G. Dal Maso ([BDM97]) a alors été proposée. Pour une triangulation \mathbf{T} , on définit un opérateur $M : \mathbf{R}^{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{T}}$ tel que pour tout $(v_T)_{T \in \mathbf{T}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{T}}$,

$$(Mv)_T = M_T(v) = \frac{\sum_{T' \in \mathbf{T}, T' \cap T \neq \emptyset} |T' \cap \Omega| v_{T'}}{\sum_{T' \in \mathbf{T}, T' \cap T \neq \emptyset} |T' \cap \Omega|}. \quad (8)$$

Pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{T \in \mathbf{T}} |T \cap \Omega| u_T \cdot v_T,$$

l'adjoint de M_T , M_T^* est alors donné par

$$(M^*v)_T = M_T^*(v) = \sum_{T' \in \mathbf{T}, T' \cap T \neq \emptyset} \frac{|T' \cap \Omega|}{S_{T'}} v_{T'}. \quad (9)$$

On définit alors une fonctionnelle «stabilisée»,

$$F_h(u, \mathbf{T}) = \sum_{T \in \mathbf{T}} |T \cap \Omega| \frac{1}{H_T} f(H_T M_T^*(|\nabla u|^2)). \quad (10)$$

La Γ -convergence de cette seconde fonctionnelle est alors prouvée. La méthode numérique utilisée est identique. Cette seconde fonctionnelle s'avère plus stable que la première et les résultats obtenus sont bien meilleurs, tant d'un point de vue qualitatif que quantitatif, sans dégradation notable des performances. Des exemples numériques sur des images synthétiques viennent illustrer cette comparaison. Notons que cet opérateur M_T présente des similarités avec les techniques de filtrages utilisées pour stabiliser des problèmes instables, notamment en optimisation topologique (cf. [Sig97]). La possibilité d'adapter les méthodes utilisées ici pour justifier ce qui est habituellement présenté comme un pur artifice de calcul est une perspective intéressante.

Outre son intérêt propre, cette seconde méthode permet de comparer les résultats obtenus par deux méthodes différentes, ce qui est important dans la mesure où on ne sait démontrer la convergence du schéma numérique ni dans ce cadre, ni dans celui proposé dans le chapitre 3. Ce point est crucial dans l'optique de la mise en œuvre du problème de mécanique de la rupture.

Notons enfin que plus encore que la première évoquée, cette méthode peut être qualifiée «d'expérimentale». Des améliorations restent à apporter, essentiellement au niveau de l'adaptation de maillage, en prenant en compte, par exemple, la courbure des bords détectés.

Le dernier chapitre, enfin, est consacré à la mise en œuvre numérique du problème de mécanique de la rupture. Dans le cas antiplan, deux méthodes numériques sont proposées. La première est celle présentée dans le chapitre 1 et la seconde est dérivée de celle présentée dans le chapitre 4. Des exemples de calculs en élasticité plane sont aussi présentés. La méthode utilisée est dérivée de celle du chapitre 1 et sort du cadre mathématique étudié et ne peut pas être rigoureusement justifiée.

Le premier exemple numérique, un calcul antiplan, est la traction sur un cylindre. Un cylindre de section annulaire est encastré sur son bord extérieur. On déplace uniformément sa circonference intérieure, dans la direction de la génératrice du cylindre. Ce problème peut être résolu analytiquement et permet alors de juger de la qualité des résultats numériques. Cet exemple est traité à l'aide des deux méthodes évoquées plus haut et les résultats numériques et analytiques s'accordent bien.

Le second exemple, la traction d'un composite renforcé par une fibre est traité en élasticité plane. On considère un milieu élastique carré, renforcé en son centre par une fibre circulaire, rigide et fixe. On exerce alors un déplacement uniforme sur une des faces du carré, en laissant les trois autres libres. Cette simulation met en évidence tous les comportements de fissuration envisagés dans [FM98], apparition brutale d'une fissure, propagation à la frontière du domaine et à l'intérieur de celui ci. Les caractéristiques de la propagation des fissures détectées sont en accord avec les remarques énoncées dans [FM98].

Dans un troisième exemple, un calcul de bifurcation, on considère un milieu rectangulaire pré fissuré. On applique un déplacement antisymétrique sur deux côtés opposés, tout en laissant les deux autres libres. On cherche alors à mettre en évidence une relation entre l'angle de propagation de la fissure et l'angle θ formé par la direction du déplacement et le côté où il est appliqué. Les résultats permettent d'estimer une relation entre deux angles, qui sera à vérifier

ultérieurement. Cependant, pour des déplacements proches du cisaillement, les fissures détectées ne sont pas admissibles d'un point de vue mécanique. Ceci est du au fait que, conformément à ce qui est dit dans le chapitre 2, le phénomène d'interpénétration des lèvres des fissures n'est pour l'instant pas pris en compte.

Ces premiers résultats numériques à l'aide du modèle de G.A. Francfort et J.-J. Marigo sont prometteurs. Rappelons en particulier qu'aucun des trois exemples présentés n'est actuellement résoluble par les méthodes usuelles en mécanique de la rupture. Cependant, ils laissent aussi le champ libre à un certain nombre d'améliorations. Tout d'abord, le cas de l'élasticité plane et à plus forte raison tridimensionnelle est encore largement ouvert, du point de vue mathématique et nécessite une étude approfondie. Enfin, sur le plan numérique, le temps de calcul est très important. À titre d'exemple, pour la troisième simulation, 21 valeurs de l'angle θ ont été envisagées. Pour chaque angle, la résolution du problème évolutif en temps, effectuée de manière itérative par minimisations successives selon les deux champs u et v , implique la résolution d'un nombre important de problèmes d'une complexité équivalente à celle d'un problème d'élasticité (de l'ordre de 100 pour chaque angle, dans ce cas). De plus, la relation entre la finesse du maillage h et le paramètre de régularisation c impose l'utilisation de maillages très fins et donc un grand nombre d'inconnues dans les problèmes d'éléments finis (plus de 20 000 dans ce cas). Au total, cette simulation représente deux mois de calcul sur un ordinateur rapide (station SGI équipée de processeurs R10000). Des améliorations sont donc nécessaires, tant sur le plan numérique pur que sur le plan théorique, en établissant par exemple une fonctionnelle régularisée ne nécessitant pas un maillage aussi fin.

Bibliographie

- [ACDM97] L. AMBROSIO, A. COSCIA, et G. DAL-MASO. « Fine Properties of functions with bounded deformation ». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 3(139):201–238, 1997.
- [Amb89] L. AMBROSIO. « Variational Problems in SBV and Image Segmentation ». *Acta Appl. Math.*, 17:1–40, 1989.
- [Amb90] L. AMBROSIO. « Existence Theory for a New Class of Variational Problems ». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 111(1):291–322, 1990.
- [AT90] L. AMBROSIO et V.M. TORTORELLI. « Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ -convergence ». *Comm. Pure Appl. Math.*, XLIII:999–1036, 1990.
- [AT92] L. AMBROSIO et V.M. TORTORELLI. « On the approximation of free discontinuity problems ». *Boll. Un. Mat. Ital. (7)*, 6-B:105–123, 1992.
- [BC94] G. BELLETTINI et A. COSCIA. « Discrete Approximation of a Free Discontinuity Problem ». *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 15:105–123, 1994.
- [BC98] B. BOURDIN et A. CHAMBOLLE. « Implementation of an adaptive finite element approximation of the Mumford-Shah functional ». Rapport Technique 9844, CEREMADE, 1998.
- [BCDM95] G. BELLETTINI, A. COSCIA, et G. DAL-MASO. « Special functions of bounded deformations ». Rapport Technique 76/95/M, SISSA, Trieste, June 1995.
- [BCDM98] G. BELLETTINI, A. COSCIA, et G. DAL-MASO. « Compactness and lower semicontinuity properties in $SBD(\Omega)$ ». *Mat. Z.*, 2(228), 1998.
- [BDM97] A. BRAIDES et G. DAL-MASO. « Non-local approximation of the Mumford-Shah functional ». *Calc. Var. Partial dif.*, 4(5):293–322, 1997.
- [Bon95] A. BONNET. « Sur la regularité des bords des minima de la fonctionnelle de Mumford-Shah ». *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 312 Série I:1275–1280, 1995.
- [BZ87] A. BLAKE et A. ZISSEMAN. *Visual Reconstruction*. MIT Press, 1987.

- [CDM99] A. CHAMBOLLE et G. DAL-MASO. « Discrete approximation of the Mumford-Shah functional in dimension two ». *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 1999. (à paraître).
- [Cha95] A. CHAMBOLLE. « Image segmentation by variational methods: Mumford and Shah functional and the discrete approximations ». *SIAM J. Appl. Math.*, 55(3):827–863, 1995.
- [Cha98] A. CHAMBOLLE. « Finite Differences Discretizations of the Mumford-Shah Functional ». *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 1998. (à paraître).
- [CL90] M. CARRIERO et A. LEACI. « Existence theorem for a Dirichlet Problem with free discontinuity set ». *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 15(7):661–677, 1990.
- [Dav96] G. DAVID. « C^1 -arcs for the minimizers of the Mumford-Shah functional ». *SIAM J. Appl. Math.*, 56(3):783–888, 1996.
- [DGCL89] E. DE-GIORGI, M. CARRIERO, et A. LEACI. « Existence Theorem for a Minimum Problem with Free Discontinuity Set ». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 108:195–218, 1989.
- [Dib94] F. DIBOS. « Uniform rectifiability of images segmentations obtained by a variational method ». *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 73(4):389–412, 1994.
- [DK91] F. DIBOS et G. KŒPFLER. « Propriétés de régularité des contours d'une image segmentée ». *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 313 Série I:573–578, 1991.
- [DM93] G. DAL-MASO. *An introduction to Γ -convergence*. Birkhäuser, Boston, 1993.
- [DMMS92] G. DAL-MASO, J.-M. MOREL, et S. SOLIMINI. « A Variational Method in Image Segmentation: Existence and Approximation Results ». *Acta Math.*, 168:89–151, 1992.
- [DS97] F. DIBOS et E. SÉRÉ. « An approximation result for the minimizers of Mumford-Shah functional ». *Boll. Un. Mat. Ital. (7)*, 11-A:149–162, 1997.
- [EG92] L.C. EVANS et R.F. GARIEPY. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, Boca Raton, 1992.

- [Fed69] H. FEDERER. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, New-York, 1969.
- [FM98] G. FRANCFORT et J.-J. MARIGO. « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem ». *J. Mech. Phys. Solids.*, 46(8):1319–1342, 1998.
- [FVP95] S. FINZI-VITA et P. PERUGIA. « Some numerical experiments on the variational approach to image segmentation. ». Dans *Proc. of the Second European Workshop on Image Processing and Mean Curvature Motion*, pages 233–240, Palma de Mallorca, September 25-27 1995.
- [GG84] S. GEMAN et D. GEMAN. « Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images ». *IEEE Trans. PAMI*, PAMI-6(6), November 1984.
- [Giu84] E. GIUSTI. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Birkhäuser, Boston, 1984.
- [Gri20] A. GRIFFITH. « The phenomena of rupture and flow in solids ». *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, CCXXXI-A:163–198, 1920.
- [MS89] D. MUMFORD et J. SHAH. « Optimal Approximation by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems ». *Comm. Pure Appl. Math.*, 42:577–685, 1989.
- [RM97] T.J. RICHARDSON et S.K. MITTER. « A variational formulation based edge focussing algorithm ». *Sadhana Acad. P. Eng. S.*, 22(4):553–574, 1997.
- [Sig97] O. SIGMUND. « On the design of compliant mechanisms using topology optimization ». *Mech. Struct. & Mach.*, 25(4):493–524, 1997.

Chapitre 1

Le cas scalaire

1.1 Notations et objet de l'étude

Dans cette partie, on présente l'étude complète d'un problème scalaire. Dans le contexte de la mécanique de la rupture vue comme un problème de minimisation d'énergie (cf. [FM98]), cette étude est celle d'un problème anti-plan, à ténacité constante dans le cadre d'un schéma de pas de temps discrets. Des multiples variantes que l'on peut extraire du modèle général, c'est aussi la plus proche du problème de segmentation d'images de Mumford-Shah.

Pour mettre en évidence que les méthodes présentées ici sont indépendantes de la dimension du problème, on ne se restreint pas au cas bidimensionnel, mais on considère un problème n -dimensionnel.

Dans tout ce qui suit, Ω désigne un ouvert borné de \mathbf{R}^n vérifiant les hypothèses suivantes :

- i) Il existe $M \subset \partial\Omega$, fermé tel que $\mathcal{H}^{n-1}(M) = 0$ et $\partial\Omega$ est un graphe Lipschitz et de classe C^1 en dehors de M ;
- ii) Il existe $\mathcal{N} \subset \partial\Omega$, fermé, tel que $\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{N} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{N}}) = 0$, où par $\overset{\circ}{\mathcal{N}}$, on désigne l'intérieur de \mathcal{N} , relativement à $\partial\Omega$ (on peut, par exemple supposer que \mathcal{N} est constitué d'un nombre fini de composantes connexes).

Par U , on désigne une fonction $W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$, et on définit alors pour tout K , fermé de $\overline{\Omega}$ tout $0 < \lambda < \infty$ et toute fonction $u \in C^1(\Omega \setminus (K \cup \mathcal{N}); \mathbf{R})$, la fonctionnelle dite «forte»

$$\mathcal{E}(u, \lambda, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(K \setminus \mathcal{N}). \quad (1.1)$$

On cherche alors à étudier le problème «fort» suivant :

$$\inf \left\{ \mathcal{E}(u, \lambda, K); K \text{ fermé } \subset \overline{\Omega}, u \in W^{1,2} \setminus (K \cup \mathcal{N}); \mathbf{R}, u = U \text{ sur } \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega} \right\}. \quad (1.2)$$

Dans un premier temps, on montre l'existence d'une solution à ce problème et pour ce, on introduit une fonctionnelle «faible», définie pour toute fonction $u \in SBV(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$ et tout Borel $B \subset \mathbf{R}^n$ par

$$E(u, \lambda, B) = \int_B |\nabla u|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(S_u \cap B). \quad (1.3)$$

On pose alors le problème faible suivant

$$\inf \{E(u, \lambda, \overline{\Omega} \setminus \mathcal{N}) ; u \in SBV(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}), u = U \text{ sur } \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}\}, \quad (1.4)$$

et on montre dans la section 1.2.2, qu'il admet des solutions. Puis, dans les sections 1.2.3 et 1.2.4, on montre que les problèmes fort et faible sont équivalents, d'où on déduit l'existence d'une solution du problème (1.2).

Ensuite, on présente dans la section 1.3 une méthode d'approximation des minimisateurs de E , basée sur une régularisation de la fonctionnelle faible et des propriétés de Γ -convergence. Cette régularisation se prête à une mise en œuvre numérique efficace, qui n'est pas détaillée ici, mais qui est similaire à celle présentée dans la seconde partie.

1.2 Existence d'un minimum

1.2.1 Propriétés élémentaires du problème faible

Soit $A \subset \mathbf{R}^n$, on dit que $u \in SBV(\mathbf{R}^n)$ est un quasi-minimisateur de E sur A et on note $u \in M(\lambda, A)$ si

- i) pour tout $A' \subset A$, $E(u, \lambda, A') < \infty$;
- ii) quelque soit $v \in SBV(\mathbf{R}^n)$, telle que $\{v \neq u\} \subset A$, on a $E(u, \lambda, A) \leq E(v, \lambda, A)$.

On montre aisément les propriétés suivantes, qui seront fréquemment utilisées par la suite.

Remarque 1.2.1.

Soit $U \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$ et $u \in SBV(\mathbf{R}^n)$, une solution du problème faible (1.4).

Alors, $\forall A \subset \Omega$, on a

$$u \in M(\lambda, \overline{A} \cap \overline{\Omega})$$

Cette remarque est triviale mais permet d'appliquer les propriétés suivante aux minimisateurs de E .

Remarque 1.2.2 (Estimation L^∞ des minimisateurs de E).

Soit $U \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$ et $u \in SBV(\mathbf{R}^n)$ tel que $u = U$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ et $\bar{u} = \min(u, \|U\|_\infty)$. Alors, on a

$$E(\bar{u}, \lambda, \Omega) \leq E(u, \lambda, \Omega)$$

Ainsi, si u est une solution de (1.4), alors \bar{u} est aussi solution du problème faible et on pourra donc supposer par la suite, et ceci sans perte de généralité, que $\|u\|_\infty \leq \|U\|_\infty$.

Remarque 1.2.3 (Estimation supérieure de densité dans Ω).

Soit $x \in \Omega$. Pour tout $\rho > 0$ et tout $u \in M(\lambda, \overline{B_\rho(x)})$, si $B_\rho(x) \subset \Omega$, on a :

$$E(u, \lambda, \overline{B_\rho(x)}) \leq \lambda n \omega_n \rho^{n-1}.$$

Remarque 1.2.4 (Estimation supérieure de densité sur $\partial\Omega$).

Soit $x \in \partial\Omega \setminus M$ et $U \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$. Soit $\rho_0 \leq 1$ tel que pour tout $\rho \leq \rho_0$, $\partial\Omega \cap B_\rho(x)$ est un graphe Lipschitz et que $(B_{\rho_0}(x) \cap \partial\Omega) \cap M = \emptyset$. Il existe une constante $C = C(x)$ telle que pour tout $u \in M(\lambda, \overline{B_\rho(x)})$, si $u = U$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ alors on a l'estimation :

$$E(u, \lambda, \overline{B_\rho(x)}) \leq ((\|\nabla U\|_\infty^2 + \lambda n) \omega_n + C \omega_{n-1}) \rho^{n-1}.$$

Remarque 1.2.5 (Quasi minimisateurs et transformations affines).

Soit $u \in M(\lambda, A)$.

Soit T , une translation, $A_T = T(A)$ et $u_T = u \circ T$. Alors,

$$u_T \in M(\lambda, A_T).$$

Soit R , une rotation, $A_R = R(A)$ et $u_R = u \circ R$. Alors,

$$u_R \in M(\lambda, A_R).$$

Soit $C \in \mathbf{R}$. Alors,

$$(u + C) \in M(\lambda, A).$$

Soit $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $\rho > 0$, $u_\rho(x) = u(x_0 + \rho x) / \sqrt{\rho}$ et $A_\rho = \{x_0 + \rho x ; x \in A\}$. Alors,

$$u_\rho \in M(\lambda, A_\rho).$$

Soit $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $\rho > 0$, $u_\rho(x) = u(x_0 + \rho x)$ et $A_\rho = \{x_0 + \rho x ; x \in A\}$. Alors,

$$u_\rho \in M(\rho \lambda, A_\rho).$$

Preuve de la remarque 1.2.2.

Il suffit de remarquer que $S_{\bar{u}} \subset S_u$ (et donc que $\mathcal{H}^{n-1}(S_{\bar{u}}) \leq \mathcal{H}^{n-1}(S_u)$) et que $\int_{\Omega} |\nabla \bar{u}|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$. Alors, $E(\bar{u}, \lambda, \Omega) \leq E(u, \lambda, \Omega)$ et comme $\bar{u} = u = U$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, \bar{u} est une solution de (1.4). \square

Preuve de la remarque 1.2.3.

Soit $v = u \cdot (1 - \chi_{B_\rho(x)})$. Comme $u \in SBV(\mathbf{R}^n)$ et $B_\rho(x)$ est de périmètre fini, v est dans $SBV(\mathbf{R}^n)$ et $E(v, \lambda, \overline{B_\rho(x)}) \leq \lambda \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_\rho(x))$. Donc, comme $u \in M(\lambda, \overline{B_\rho(x)})$, on a $E(u, \lambda, \overline{B_\rho(x)}) \leq E(v, \lambda, \overline{B_\rho(x)}) \leq \lambda n \omega_n \rho^{n-1}$. \square

Preuve de la remarque 1.2.4.

Le raisonnement est similaire à celui de la remarque précédente : Soit $v = u$ sur $\mathbf{R}^n \setminus (\overline{B_\rho(x)} \cap \overline{\Omega})$ et 0 sinon. Alors, on a $E(u, \lambda, \overline{B_\rho(x)} \cap \overline{\Omega}) \leq E(v, \lambda, \overline{B_\rho(x)} \cap \overline{\Omega})$ et comme $u = v = U$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$,

$$\begin{aligned} E(u, \lambda, \overline{B_\rho(x)}) &\leq E(v, \lambda, \overline{B_\rho(x)}) \\ &\leq \int_{B_\rho(x) \cap \Omega} |\nabla U|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(\partial(B_\rho(x) \cap \overline{\Omega})) \\ &\leq \int_{B_\rho(x)} |\nabla U|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_\rho(x)) + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(\partial \Omega \cap B_\rho(x)) \\ &\leq \|\nabla U\|_\infty^2 \omega_n \rho^n + \lambda n \omega_{n-1} \rho^{n-1} + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(\partial \Omega \cap B_\rho(x)) \end{aligned}$$

Comme $\partial \Omega \cap B_\rho(x)$ est un graphe Lipschitz, alors il existe une fonction $\phi : \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$ Lipschitz continue telle que pour tout $z = (z_1, \dots, z_n) \in \partial \Omega \setminus B_\rho(x)$, on a $\phi(z_1, \dots, z_{n-1}) = z_n$. Alors,

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial \Omega \cap B_\rho(x)) \leq \int_{B_\rho^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} (1 + |\nabla \phi|^2)^{1/2} dy,$$

où $B_\rho^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ désigne la boule de \mathbf{R}^{n-1} de rayon ρ , centrée en (x_1, \dots, x_{n-1}) . Alors, en posant $C = (1 + (\text{Lip } \phi)^2)^{1/2}$, on obtient

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial \Omega \cap B_\rho(x)) \leq C \omega_{n-1} \rho^{n-1}$$

et donc

$$E(u, \lambda, \overline{B_\rho(x)}) \leq ((\|\nabla U\|_\infty^2 + \lambda n) \omega_n + C \omega_{n-1}) \rho^{n-1}.$$

\square

Preuve de la remarque 1.2.5.

Les trois premières affirmations sont triviales. Montrons donc la troisième assertion, en supposant donc que $x_0 = 0$. On a $\mathcal{H}^{n-1}(S_{u_\rho} \cap A_\rho) = \int_{S_{u_\rho} \cap A_\rho} 1 d\mathcal{H}^{n-1}(x)$ et en faisant le changement de variable $y = \rho x$, il vient $\mathcal{H}^{n-1}(S_{u_\rho} \cap A_\rho) = \int_{S_u \cap A} \rho^{1-n} d\mathcal{H}^{n-1}(y)$. De même, $\int_{A_\rho} |\nabla u_\rho|^2 dx = \rho^{1-n} \int_A |\nabla u|^2 dy$ et donc

$$E(u, \lambda, A) = \rho^{n-1} E(u_\rho, \lambda, A_\rho)$$

Supposons maintenant $u \in M(\lambda, A)$ alors, pour tout $v \in SBV(\mathbf{R}^n)$ tel que $\{u \neq v\} \subset A$, on a $E(u, \lambda, A) \leq E(v, \lambda, A)$, donc, avec les mêmes notations, $E(u_\rho, \lambda, A_\rho) \leq E(v_\rho, \lambda, A_\rho)$, $v_\rho \in SBV(\mathbf{R}^n)$ et $\{u_\rho \neq v_\rho\} \subset A_\rho$. Donc, de l'arbitraire de v et donc de v_ρ , on déduit que

$$u_\rho \in M(\lambda, A_\rho).$$

Enfin, on montre la dernière assertion se de la même manière, en remarquant que $E(u_\rho, \lambda, A_\rho) = \rho^{n-2} E(u, \lambda, A)$. \square

On remarque enfin que si l'on remplace la fonction U par une fonction $V \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$, telle que $V = U$ sur $\partial\Omega$, on ne change en rien les problèmes forts et faibles. On pourra donc remplacer à notre convenance les hypothèses $u = U$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, par $u = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$ pour tout $\tilde{\Omega}$, ouvert borné de \mathbf{R}^n tel que $\Omega \Subset \tilde{\Omega}$.

1.2.2 Existence d'une solution du problème faible

L'existence de la solution du problème faible est une conséquence des résultats de semi-continuité et de compacité dans SBV , [Amb89], théorème 3.1 p. 13, ou [Amb90], théorème 2.1 p. 301 pour la compacité et [Amb90] théorème 3.6 p. 311 pour la semi-continuité.

On remarque tout d'abord que l'infimum du problème faible est fini. En effet, il suffit de poser $w = U$ et on obtient que $E(w, \lambda, \overline{\Omega} \setminus \mathcal{N}) \leq |\Omega| \|\nabla U\|_\infty < \infty$.

Soit maintenant une suite minimisante pour $E(\bullet, \lambda, \overline{\Omega} \setminus \mathcal{N})$, telle que $v_h = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$. Comme $E(v, \lambda, \overline{\Omega} \setminus \mathcal{N}) < \infty$, ∇v_h est uniformément bornée dans $L^2(\tilde{\Omega})$ et d'après la remarque 1.2.2, on peut supposer v_h uniformément bornée dans $L^\infty(\tilde{\Omega})$. D'après le théorème de compacité dans SBV , il existe alors une fonction $v \in SBV(\tilde{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$, telle que $v = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$ et $v_h \xrightarrow{L^1(\tilde{\Omega})} v$. En appliquant alors le théorème de semi-continuité dans SBV sur $\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}$, on obtient que

$$\int_{\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}} |\nabla v|^2 dx \leq \liminf \int_{\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}} |\nabla v_h|^2 dx$$

et

$$\mathcal{H}^{n-1}(S_v \cap (\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N})) \leq \liminf \mathcal{H}^{n-1}(S_{v_h} \cap (\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N})).$$

En remarquant que comme $U \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$ et $v_h = v = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$, alors $\mathcal{H}^{n-1}(S_{v_h} \cap \tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}) = \mathcal{H}^{n-1}(S_v \cap \tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}) = 0$ et donc

$$\liminf E(v_h, \lambda, \overline{\Omega} \setminus \mathcal{N}) \geq E(v, \lambda, \overline{\Omega} \setminus \mathcal{N}).$$

Enfin, comme v_h est une suite minimisante pour $E(\bullet, \lambda, \overline{\Omega} \setminus \mathcal{N})$, on conclut donc que v est une solution du problème faible.

1.2.3 Estimation de la fonctionnelle faible

La première étape, pour montrer l'équivalence des problèmes fort et faibles, est de montrer que tout fonction admissible pour le problème fort, l'est aussi pour le problème faible, et de comparer nos deux fonctionnelles, \mathcal{E} et E . On démontre pour cela, la proposition suivante.

Proposition 1.2.6. *Soit Ω , vérifiant les hypothèses énoncées dans la section 1.1, K fermé inclus dans $\overline{\Omega}$, tel que $\mathcal{H}^{n-1}(K \cap \overline{\Omega}) < \infty$ et $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^n \setminus (K \cup \mathcal{N}))$ telle que $\mathcal{E}(u, \lambda, K) < \infty$. Alors,*

$$u \in SBV(\mathbf{R}^n), S_u \subset K \cup \mathcal{N}$$

et

$$E(u, \lambda, \overline{\Omega} \setminus \mathcal{N}) \leq \mathcal{E}(u, \lambda, K)$$

Dans ce qui suit, on note \mathcal{H}_S^{n-1} , la mesure sphérique $n - 1$ dimensionnelle de Hausdorff (pour une définition et des propriétés de \mathcal{H}_S^{n-1} , on se reportera à [Fed69], 2.10.2(2) p. 171). On a alors $\mathcal{H}_S^{n-1}(K \cup \mathcal{N}) \leq 2^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(K \cup \mathcal{N}) < \infty$ et donc, d'après la définition de \mathcal{H}_S^{n-1} , pour tout $\delta > 0$ assez petit, il existe une famille dénombrable de boules ouvertes $B_i^\delta = B_{\rho_i}^\delta(x_i)$, telles que $x_i \in K \cup \mathcal{N}$, $0 < \rho_i^\delta < \delta$, $K \cup \mathcal{N} \subseteq \bigcup B_i^\delta = K_\delta$ et d'après la définition de \mathcal{H}_S^{n-1} ,

$$\begin{aligned} \sum_i \omega_{n-1}(\rho_i^\delta)^{n-1} &\leq \mathcal{H}_S^{n-1}(K \cup \mathcal{N}) + 2^{n-1} \\ &\leq 2^{n-1}(\mathcal{H}^{n-1}(K \cup \mathcal{N}) + 1). \end{aligned}$$

De plus, comme $K \cup \mathcal{N}$ est compact, on peut extraire de ce recouvrement, un recouvrement fini par N de ces boules vérifiant les mêmes propriétés.

Soit alors

$$u_\delta = \begin{cases} u \text{ dans } \mathbf{R}^n \setminus K_\delta, \\ 0 \text{ dans } K_\delta. \end{cases}$$

D'après la construction de K_δ , on a

$$\begin{aligned} |K_\delta| &\leq \sum_i^N \omega_n (\rho_i^\delta)^n \\ &\leq \delta \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \sum_i^N \omega_{n-1} (\rho_i^\delta)^{n-1} \\ &\leq \delta \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} (2^{n-1} (\mathcal{H}^{n-1}(K \cup \mathcal{N}) + 1)) \end{aligned}$$

et donc $|K_\delta| \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$ et $u_\delta \rightarrow u$ dans L^1 . De plus,

$$\begin{aligned} P(K_\delta) &\leq \sum_i^N P(B_i^\delta) \\ &\leq \sum_i^N n \omega_n (\rho_i^\delta)^{n-1} \\ &\leq N \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} (2^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(K) + 1) \\ &\leq C < \infty \end{aligned}$$

Remarquons que ∂K_δ ne peut avoir qu'un nombre fini de points cuspides. En rajoutant à K_δ , des boules centrées en ces points cuspides et de rayon suffisamment petit pour ne pas modifier les estimations de $P(K_\delta)$ et de $|K_\delta|$. Ainsi, on peut supposer ∂K_δ Lipschitz. Dans ce cas, $u_\delta \in SBV(\mathbf{R}^n)$, $S_{u_\delta} \subset \partial K_\delta$ donc $\mathcal{H}^{n-1}(S_{u_\delta}) \leq P(K_\delta) \leq C$ et $\int_{\Omega} |\nabla u_\delta|^2 dx \leq \int_{\Omega \setminus (K \cup \mathcal{N})} |\nabla u|^2 dx$. D'après les théorèmes de compacité dans SBV ([Amb89], théorème 3.1 p. 13, ou [Amb90] théorème 2.1 p. 301), on a alors

$$u \in SBV(\mathbf{R}^n).$$

Enfin, comme $\mathcal{E}(u, \lambda, K) < \infty$, on a $u \in \mathcal{C}^1(\Omega \setminus K \cup \mathcal{N})$ et donc $S_u \subset K \cup \mathcal{N}$ et

$$\begin{aligned} E(u, \lambda, \overline{\Omega} \setminus \mathcal{N}) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{n-1}(S_u \cap (\overline{\Omega} \setminus \mathcal{N})) \\ &\leq \int_{\Omega \setminus (K \cup \mathcal{N})} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{n-1}(K \setminus \mathcal{N}) \\ &= \mathcal{E}(u, \lambda, K). \end{aligned}$$

1.2.4 Régularité des minimisateurs du problème faible

La deuxième étape, est alors d'établir que les minimisateurs de la fonctionnelle faible sont admissibles pour le problème fort. Dans un premier temps, on montre

le résultat de régularité suivant.

Proposition 1.2.7. *Soit Ω , \mathcal{N} et U définis comme précédemment. Soit u , une solution du problème faible (1.4). Alors les sauts de u vérifient*

$$\mathcal{H}^{n-1}(\overline{(S_u \setminus \mathcal{N})} \setminus (S_u \setminus \mathcal{N})) = 0.$$

Preuve de la proposition (1.2.7).

Soit u , minimisant $E(\bullet, \lambda, \overline{\Omega} \setminus \mathcal{N})$, et Ω_0 , défini par

$$\Omega_0 = \{x \in \overline{\Omega} \setminus M ; E(u, \lambda, \overline{\Omega} \cap \overline{B_\rho}(x)) = o(\rho^{n-1})\}. \quad (1.5)$$

On raisonne en trois étapes. Tout d'abord, on montre que $S_u \subset \overline{\Omega} \setminus \Omega_0$, puis, à un ensemble de \mathcal{H}^{n-1} -mesure nulle près, que Ω_0 est relativement ouvert dans $\overline{\Omega} \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M)$ et pour conclure, on prouve que $\mathcal{H}^{n-1}((\overline{\Omega} \setminus \mathcal{N}) \setminus \Omega_0) \setminus (S_u \setminus \mathcal{N}) = 0$.

Montrons tout d'abord que $S_u \subset \overline{\Omega} \setminus \Omega_0$. On remarque que comme $U \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$ et $u = U$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, on a

$$\begin{aligned} E(u, \lambda, \overline{B_\rho}(x)) &= E(u, \lambda, \overline{\Omega} \cap \overline{B_\rho}(x)) + \int_{B_\rho(x) \setminus \Omega} |\nabla U|^2 dx \\ &\leq E(u, \lambda, \overline{\Omega} \cap \overline{B_\rho}(x)) + \int_{B_\rho(x)} |\nabla U|^2 dx \\ &\leq E(u, \lambda, \overline{\Omega} \cap \overline{B_\rho}(x)) + \|\nabla U\|_\infty^2 \omega_n \rho^n \end{aligned}$$

et donc, si

$$E(u, \lambda, \overline{\Omega} \cap \overline{B_\rho}(x)) = o(\rho^{n-1})$$

alors,

$$E(u, \lambda, \overline{B_\rho}(x)) = o(\rho^{n-1}).$$

Soit alors $x \in \Omega_0$ et $u_\rho(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^n} \int_{B_\rho(x)} u(y) dy$. Comme BV s'injecte continument dans $L^{n/(n-1)}$, et en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho(x)} |u_\rho(x) - u(y)| dy \leq \frac{1}{\rho^{n-1}} \|u - u_\rho(x)\|_{L^{n/(n-1)}(B_\rho(x))} \omega_n^{1/n}$$

En appliquant alors l'inégalité de Poincaré-Wirtinger dans BV (cf. [EG92], chap. 5.6, théorème 1 p. 189), il vient

$$\frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho(x)} |u_\rho(x) - u(y)| dy \leq C(n) \frac{|Du|(B_\rho(x))}{\rho^{n-1}}.$$

Or, d'après la remarque (1.2.2), on peut supposer que $\|u\|_\infty \leq \|U\|_\infty$ et donc

$$\begin{aligned} |Du|(B_\rho(x)) &\leq \int_{B_\rho(x)} |\nabla u| dy + 2\|U\|_\infty \mathcal{H}^{n-1}(S_u \cap B_\rho(x)) \\ &\leq \int_{B_\rho(x)} |\nabla u| dy + 2\|U\|_\infty E(u, \lambda, B_\rho(x)) \end{aligned}$$

d'où, en appliquant une nouvelle fois l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} |Du|(B_\rho(x)) &\leq \|\nabla u\|_{L^2(B_\rho(x))} |B_\rho(x)|^{1/2} + 2\|U\|_\infty E(u, \lambda, B_\rho(x)) \\ &\leq (\omega_n \rho^n)^{1/2} E(u, \lambda, B_\rho(x))^{1/2} + 2\|U\|_\infty E(u, \lambda, B_\rho(x)) \\ &= o(\rho^{n-1/2}) + o(\rho^{n-1}) \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho(x)} |u_\rho(x) - u(y)| dy = o(\rho^{1/2}) + o(1).$$

Enfin, en faisant tendre ρ vers 0, on conclut que x est un point de Lebesgue de u , donc que $x \notin S_u$ et que

$$S_u \subset \overline{\Omega} \setminus \Omega_0, \quad (1.6)$$

ce qui achève la première étape

Montrons maintenant qu'à un ensemble de \mathcal{H}^{n-1} -mesure nulle près, Ω_0 est relativement ouvert dans $\overline{\Omega} \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M)$.

Soit $x \in (\overline{\Omega} \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M)) \cap \Omega_0$, il suffit de prouver qu'il existe une boule ouverte $B_\rho(x)$ telle que $B_\rho(x) \cap (\overline{\Omega} \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M)) \subset \Omega_0$. On peut alors distinguer deux cas :

- Si $x \in \Omega$, alors on est dans le cadre du lemme 4.11 p. 213 dans [DGCL89] et pour ρ assez petit, il existe $B_\rho(x) \subset \Omega \cap \Omega_0$;
- Sinon; comme on a supposé \mathcal{N} fermé et $\mathcal{H}^{n-1}(M) = 0$, en dehors d'un ensemble de \mathcal{H}^{n-1} -mesure nulle, il existe $\rho > 0$ tel que $B_{2\rho}(x) \cap M = \emptyset$ et $B_{2\rho}(x) \cap \overset{\circ}{\mathcal{N}} = \emptyset$.

Placons nous donc dans le deuxième cas et montrons alors que si ρ est assez petit, alors $B_\rho(x) \cap \partial\Omega \subset \Omega_0$.

Tout d'abord, montrons le lemme technique suivant :

Lemme 1.2.8 (Décroissance de E).

Soit $U \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$ et $u \in M(c, \overline{B_1} \cap \overline{\Omega})$, tel que $u = U$ sur $B_1 \setminus \overline{\Omega}$.

Pour tout $0 < c < \infty$, $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha < 1$ et $L > 0$, il existe θ et ε tels que si $\text{Lip } U < L$ et $\mathcal{H}^{n-1}(S_u \cap \overline{B_1}) \leq \varepsilon$ et si $\partial\Omega \cap B_1$ est un le graphe d'une fonction Lipschitz continue, ϕ telle que $\phi(0) = |\nabla\phi(0)| = 0$, $\text{Lip } \phi \leq 1$, alors

$$E(u, c, \overline{B_\alpha}) \leq \alpha^{n-\beta} \max(E(u, c, \overline{B_1}), \theta((\text{Lip } \phi)^2 + (\text{Lip } U)^2))$$

Preuve du lemme 1.2.8.

On raisonne par l'absurde.

Supposons le lemme faux. Alors, il existe $0 < c < \infty$, $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha < 1$, $L > 0$, deux suites ε_h et θ_h telles que $\lim_{h \rightarrow \infty} \varepsilon_h = 0$ et $\lim_{h \rightarrow \infty} \theta_h = \infty$; $\phi_h \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^{n-1})$, telle que $\phi_h(0) = |\nabla\phi_h(0)| = 0$, $\|\phi_h\|_\infty \rightarrow 0$ et $\text{Lip } \phi_h \leq 1$ et $U_h \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$ telle que $\text{Lip } U_h < L$. De plus, il existe une suite de quasi-minimisateurs $u_h \in M(c, \overline{\Omega_{\phi_h}})$ tels que $u_h = U_h$ sur $B_1 \setminus \overline{\Omega_{\phi_h}}$, où $\Omega_{\phi_h} = \{x \in B_1 ; x_n > \phi_h(x_1, \dots, x_{n-1})\}$ et vérifiant les propriétés :

$$\mathcal{H}^{n-1}(S_{u_h} \cap \overline{B_1}) = \varepsilon_h; \quad (1.7)$$

$$E(u_h, c, \overline{B_\alpha}) > \theta_h \alpha^{n-\beta} ((\text{Lip } \phi_h)^2 + (\text{Lip } U_h)^2); \quad (1.8)$$

$$E(u_h, c, \overline{B_\alpha}) > \alpha^{n-\beta} E(u_h, c, \overline{B_1}). \quad (1.9)$$

Renormalisons alors notre problème : soit

$$\gamma_h = E(u_h, c, \overline{B_1}).$$

Si il existe h tel que $\gamma_h = 0$, alors la contradiction est immédiate, supposons donc $\gamma_h > 0$ pour tout h et posons alors

$$\tau_h = \frac{c}{\gamma_h}.$$

À l'aide de γ_h et de τ_h , on cherche alors à construire une suite v_h , telle que $v_h \in SBV(B_1)$ et $E(v_h, \gamma_h, \overline{B_1}) = 1$. En l'absence de borne inférieure sur γ_h , poser simplement $v_h = u_h / \sqrt{\gamma_h}$ ne serait pas suffisant. Pour toute boule B et tout $0 \leq s \leq |B|$, on définit donc le réarrangement croissant d'une fonction mesurable $u : B \rightarrow \mathbf{R}$, par

$$u_*(s, B) = \inf \{t \in \mathbf{R} ; |\{u < t\} \cap B| \geq s\}$$

et sa médiane,

$$\text{med}(u, B) = u_*(|B|/2, |B|).$$

Soit donc

$$\begin{aligned} v_h &= \frac{u_h}{\sqrt{\gamma_h}} - \text{med}\left(\frac{u_h}{\sqrt{\gamma_h}}\right); \\ w_h &= \frac{U_h}{\sqrt{\gamma_h}} - \text{med}\left(\frac{u_h}{\sqrt{\gamma_h}}\right). \end{aligned}$$

Alors, on a

$$E(v_h, \tau_h, \overline{B_1}) = 1 \quad (1.10)$$

$$E(v_h, \tau_h, \overline{B_\alpha}) > \alpha^{n-\beta} \quad (1.11)$$

$$v_h = w_h \text{ sur } B_1 \setminus \overline{\Omega_{\phi_h}} \quad (1.12)$$

$$v_h \in M(\tau_h, \overline{\Omega_{\phi_h}}) \quad (1.13)$$

$$\mathcal{H}^{n-1}(S_{v_h} \cap \overline{B_1}) = \mathcal{H}^{n-1}(S_{u_h} \cap \overline{B_1}) = \varepsilon_h \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow \infty \quad (1.14)$$

On peut donc appliquer le théorème 2.6 p. 666 de [CL90] (ou utiliser le théorème 3.1 p. 203 de [DGCL89] puis le théorème de compacité sur SBV d'Ambrosio, [Amb89], théorème 3.1 p. 13, ou [Amb90], théorème 2.1 p. 301) d'où on déduit qu'il existe une fonction $v_\infty \in W^{1,2}(B_1)$ telle que

$$v_h \rightarrow v_\infty \text{ presque partout sur } B_1. \quad (1.15)$$

D'après la remarque préliminaire 1.2.4 et comme $\text{Lip } \phi_h \leq 1$, $E(u_h, c, \overline{B_1})$ est uniformément borné et donc

$$\sup \gamma_h < \infty$$

et en utilisant l'hypothèse (1.8), on a

$$\begin{aligned} ((\text{Lip } \phi_h)^2 + (\text{Lip } U_h)^2) &< \frac{E(u_h, c, \overline{B_\alpha})}{\theta_h \alpha^{n-\beta}} \\ &< \frac{E(u_h, c, \overline{B_1})}{\theta_h \alpha^{n-\beta}} \\ &< \frac{\gamma_h}{\theta_h \alpha^{n-\beta}} \end{aligned}$$

et donc

$$\text{Lip } \phi_h \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow \infty \quad (1.16)$$

et

$$\text{Lip } \frac{U_h}{\sqrt{\gamma_h}} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow \infty. \quad (1.17)$$

De cette dernière relation, on déduit que

$$\|\nabla w_h\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow \infty. \quad (1.18)$$

Soit alors $x \in B_1$ tel que pour tout h assez grand, $x \in B_1 \setminus \overline{\Omega_{\phi_h}}$ et que $v_h(x) \rightarrow v_\infty(x)$. Montrons que w_h converge uniformément vers une constante : Pour tout $y \in B_1$, on a

$$\begin{aligned} |w_h(y) - v_\infty(x)| &\leq |w_h(y) - v_h(x)| + |v_h(x) - v_\infty(x)| \\ &\leq |w_h(y) - w_h(x)| + |v_h(x) - v_\infty(x)| \\ &\leq \|\nabla w_h\|_\infty |y - x| + |v_h(x) - v_\infty(x)|. \end{aligned}$$

Alors, comme $\nabla w_h \rightarrow 0$ uniformément et comme $v_h(x) \rightarrow v_\infty(x)$, on a

$$w_h(y) \rightarrow v_\infty(x) \text{ dans } L^\infty(B_1).$$

Dans tout ce qui suit, on supposera que $v_\infty(x) = 0$, ce qui ne nuit en rien à la généralité des propos, si l'on remarque que d'après la remarque 1.2.5, on peut ajouter à toute fonction, une constante sans modifier la valeur de son énergie E ni son éventuelle appartenance à un ensemble de quasi-minimisateurs.

Ainsi, on a

$$\|w_h\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow \infty. \quad (1.19)$$

Enfin, d'après (1.16), et les hypothèses sur ϕ_h , on a

$$\|\nabla \phi_h\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow \infty. \quad (1.20)$$

Comme $\rho \rightarrow E(v_h, \tau_h, \overline{B_\rho})$ est croissante et comme $E(v_h, \tau_h, \overline{B_1}) = 1$ alors, pour presque tout $\rho \leq 1$ il existe $a(\rho) < \infty$ tel que,

$$a(\rho) = \lim_h E(v_h, \tau_h, \overline{B_\rho}). \quad (1.21)$$

Montrons alors que v_∞ vérifie les quatre propriétés suivantes :

- i) $v_\infty \in W^{1,2}(B_1)$;
- ii) v_∞ est harmonique sur $\{x ; x_n > 0\} \cap B_1$;
- iii) $v_\infty = 0$ sur $\{x ; x_n \leq 0\} \cap B_1$;
- iv) $\int_{B_\rho} |\nabla v_\infty|^2 dx = a(\rho)$ pour presque tout $\rho < 1$.

Tout d'abord, comme $\phi_h(0) = |\nabla \phi_h(0)| = 0$ et comme $\text{Lip}(\phi_h) \rightarrow 0$, pour tout $0 < \delta < 1$, et pour h assez grand, on a

$$-\delta < \phi_h < \delta. \quad (1.22)$$

Comme $v_h = w_h$ sur $B_1 \setminus \overline{\Omega_{\phi_h}}$ et d'après (1.19), alors $v_h \rightarrow 0$ uniformément sur $\{x_n < -\delta\} \cap B_1$ et donc, en prenant en compte l'hypothèse (1.15) et par l'arbitrairité de δ , il vient

$$v_\infty = 0 \text{ sur } \{x_n < 0\} \cap B_1.$$

Soient x, r tels que $\overline{B_r(x)} \subset \{x \in B_1 ; x_n > \delta\}$. Alors $\overline{B_r(x)} \subset \Omega_{\phi_h}$ pour tout h assez grand et donc $v_h \in M(\tau_h, \overline{B_r}(x))$ et quelque soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_r(x))$, on a

$$E(v_h + \psi, \tau_h, \overline{B_r}(x)) \geq E(v_h, \tau_h, \overline{B_r}(x))$$

d'où, comme $S_{v_h+\psi} = S_{v_h}$

$$\int_{B_r(x)} |\nabla v_h + \nabla \psi|^2 dx \geq \int_{B_r(x)} |\nabla v_h|^2 dx$$

et

$$\int_{B_r(x)} |\nabla \psi|^2 dx + 2 \int_{B_r(x)} \langle \nabla \psi, \nabla v_h \rangle dx \geq 0$$

et donc, en remplaçant ψ par $\eta \psi$ et en faisant tendre η vers 0,

$$\int_{B_r(x)} \langle \nabla \psi, \nabla v_h \rangle dx \geq 0$$

et, en appliquant cette inégalité à $-\psi$, on obtient

$$\int_{B_r(x)} \langle \nabla \psi, \nabla v_h \rangle dx = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_r(x)).$$

Enfin, d'après (1.14) et (1.15) et comme $E(v_h, \tau_h, B_r(x))$ est uniformément borné, on peut appliquer les théorèmes de compacité ([Amb89], théorème 3.1 p. 13, ou [Amb90] théorème 2.1 p. 301) et de semi-continuité dans SBV ([Amb90] théorème 3.6 p. 311) pour obtenir :

$$\nabla v_h \rightharpoonup \nabla v_\infty \text{ dans } L^1(B_r(x))$$

et

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{n-1}(S_{v_h} \cap B_r(x)) \geq \mathcal{H}^{n-1}(S_{v_\infty} \cap B_r(x)),$$

d'où

$$\mathcal{H}^{n-1}(S_{v_\infty} \cap B_r(x)) = 0$$

et

$$\int_{B_r(x)} \langle \nabla \psi, \nabla v_\infty \rangle dx = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_r(x)).$$

Donc, v_∞ est harmonique et continue sur $B_r(x)$ et donc v_∞ est harmonique et continue sur $\{x \in B_1 ; x_n > 0\}$.

Le même argument de semi-continuité, appliqué sur B_1 prouve que $v_\infty \in W^{1,2}(B_1)$, d'où on déduit que $v_\infty = 0$ sur $\{x \in B_1 ; x_n \leq 0\}$ et les points *i*), *ii*) et *iii*) sont donc prouvés.

Enfin, comme $v_\infty \in W^{1,2}(B_1)$, et par la semi-continuité inférieure de E , on a

$$\int_{B_\rho} |\nabla v_\infty|^2 dx \leq a(\rho) \tag{1.23}$$

et il ne reste alors qu'à prouver que

$$\int_{B_\rho} |\nabla v_\infty|^2 dx \geq a(\rho) \text{ pour presque tout } \rho < 1.$$

Comme $\mathcal{H}^{n-1}(S_{v_h} \cap \overline{B_1}) \rightarrow 0$, alors pour h assez grand, on a

$$(2\mathcal{I}_n \mathcal{H}^{n-1}(S_{v_h} \cap B_1))^{n/(n-1)} < \frac{|B_1|}{2}$$

et on définit donc

$$\tau'(v_h, B_1) = (v_h)_* \left((2\mathcal{I}_n \mathcal{H}^{n-1}(S_{v_h} \cap B_1))^{n/(n-1)}, B_1 \right)$$

et

$$\tau''(v_h, B_1) = (v_h)_* \left(|B_1| - (2\mathcal{I}_n \mathcal{H}^{n-1}(S_{v_h} \cap B_1))^{n/(n-1)}, B_1 \right),$$

où \mathcal{I}_n désigne la constante isopérimétrique des boules de \mathbf{R}^n .

D'après (1.19), on peut supposer que $\|w_h\|_\infty < 1/h$ et on pose alors

$$\widehat{v}_h = (v_h \wedge (\tau''(v_h, B_1) \vee 1/h)) \vee (\tau'(v_h, B_1) \wedge -1/h)$$

et

$$\overline{v_h} = (v_h \wedge \tau''(v_h, B_1)) \vee \tau'(v_h, B_1)$$

On remarque que comme on a supposé $\|w_h\|_\infty < 1/h$, on a toujours $\widehat{v}_h = \overline{v_h}$ sur $B_1 \setminus \overline{\Omega_{\phi_h}}$.

Comme $v_h \rightarrow v_\infty$ presque partout sur B_1 , alors $\text{med}(v_h, B_1) \rightarrow \text{med}(v_\infty, B_1)$. De plus, d'après le théorème 2.6 p. 666 de [CL90], il existe une fonction $f_\infty \in W^{1,2}(B_1)$ telle que

$$v_h - \text{med}(v_h, B_1) \rightarrow f_\infty \text{ presque partout sur } B_1$$

et

$$\overline{v_h} - \text{med}(v_h, B_1) \rightarrow f_\infty \text{ dans } L^2(B_1)$$

et donc

$$\overline{v_h} \rightarrow v_\infty \text{ dans } L^2(B_1).$$

Montrons alors que $\widehat{v}_h \rightarrow v_\infty$ dans $L^2(B_1)$: Remarquons tout d'abord que comme $v_h \rightarrow v_\infty$ presque partout, et d'après les propriétés de v_∞ , alors il existe $C < \infty$ tel que $|\{|v_h(x)| \geq C\}| \rightarrow 0$. Alors, $\tau'(v_h, B_1)$ et $\tau''(v_h, B_1)$ sont uniformément bornés. Alors, on a

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |\widehat{v}_h - \overline{v}_h|^2 dx &= \int_{\{\tau'(v_h, B_1) \geq -1/h\}} |\tau'(v_h, B_1) + 1/h|^2 dx \\ &\quad + \int_{\{\tau''(v_h, B_1) \leq 1/h\}} |\tau''(v_h, B_1) - 1/h|^2 dx \end{aligned}$$

et donc $\widehat{v}_h - \overline{v}_h \rightarrow 0$ dans $L^2(B_1)$ et donc

$$\widehat{v}_h \rightarrow v_\infty \text{ dans } L^2(B_1).$$

Montrons de plus que $\lim_h \tau_h \mathcal{H}^{n-1}(\{\widehat{v}_h \neq v_h\} \cap \partial B_\rho) = 0$ pour presque tout $\rho < 1$:

Par la remarque 3.2 p. 202 de [DGCL89], il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que

$$|\{\widehat{v}_h \neq v_h\} \cap B_\rho| \leq C(\mathcal{H}^{n-1}(S_{v_h} \cap B_\rho))^{n/(n-1)}.$$

Alors, d'après (1.21) et (1.14), $\tau_h |\{\widehat{v}_h \neq v_h\} \cap B_\rho| \rightarrow 0$. Or, $|\{\widehat{v}_h \neq v_h\} \cap B_\rho| = \int_0^\rho \mathcal{H}^{n-1}(\{\widehat{v}_h \neq v_h\} \cap \partial B_r) dr$. Donc

$$\lim_h \tau_h \mathcal{H}^{n-1}(\{\widehat{v}_h \neq v_h\} \cap \partial B_\rho) = 0 \text{ pour presque tout } \rho < 1. \quad (1.24)$$

Soit $w'_h(x) = w_h(x) + v_\infty(x', x_n - \phi_h(x'))$. On remarque que si $x \in B_1 \setminus \Omega_{\phi_h}$, alors $w'_h = w_h$. D'après les hypothèses faites sur ϕ_h , comme $\|w_h\|_\infty \rightarrow 0$, et comme v_∞ est continue, alors

$$w'_h \rightarrow v_\infty \text{ dans } L^\infty(B_1). \quad (1.25)$$

De plus, comme $v_\infty \in \mathcal{C}^0(B_1)$ alors $\mathcal{H}^{n-1}(S_{w'_h} \cap \overline{B_\rho}) = \mathcal{H}^{n-1}(S_{w_h} \cap \overline{B_\rho}) = 0$.

Comme $\rho \rightarrow a(\rho)$ est croissante et majorée, alors $a(\bullet)$ est continue en presque tout point de $[0, 1]$. Soit alors ρ tel que la continuité de a et (1.24) soient vrais. D'après (1.18), il existe $L > 0$ tel que pour tout h assez grand, on a

$$\sup_{B_\rho} |\nabla w'_h| \leq L. \quad (1.26)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\rho_1 < \rho$ tels que

$$a(\rho) - a(\rho_1) < \varepsilon \quad (1.27)$$

$$L^2 |B_\rho \setminus B_{\rho_1}| < \varepsilon \quad (1.28)$$

Soit ρ_2 tel que $\rho_1 < \rho_2 < \rho$ et que (1.21) soit vrai. Pour tout r et δ tels que $r \geq |\delta|$, on note $B_{r,\delta} = \{x \in B_r ; x_n > \delta\}$. Soit alors ρ_3, ρ_4 tels que $\rho_2 < \rho_3 < \rho_4 < \rho$ et $\delta_1, \delta_2 > \delta$ vérifiant

$$B_{\rho_1, \delta_1} \subset \subset B_{\rho_2, \delta_2} \subset \subset B_{\rho_3} \subset \subset B_{\rho_4} \quad (1.29)$$

$$L^2 |B_{\rho_3, -\delta_2} \setminus B_{\rho_1, \delta_1}| < \varepsilon \quad (1.30)$$

On raccorde maintenant \widehat{v}_h et w'_h . On définit pour cela γ_1 et γ_2 , deux fonctions \mathcal{C}^1 telles que

$$|\gamma_1| \leq 1$$

$\gamma_1 \equiv 1$ sur un voisinage de B_{ρ_1, δ_1}

support $\gamma_1 \subset B_{\rho_2, \delta_2}$

$$|\nabla \gamma_1|^2 \leq \frac{2}{(\rho_2 - \rho_1)^2} + \frac{2}{(\delta_2 - \delta_1)^2}$$

et

$$|\gamma_2| \leq 1$$

$\gamma_2 \equiv 1$ sur un voisinage de $B_{\rho_3, -\delta_2}$

support $\gamma_2 \subset B_{\rho_4}$

$$|\nabla \gamma_2|^2 \leq \frac{2}{(\rho_4 - \rho_3)^2}$$

Soit alors

$$\zeta_h = \gamma_1 v_\infty + (1 - \gamma_1) w'_h \quad (1.31)$$

$$\xi_h = \gamma_2 \zeta_h + (1 - \gamma_2) \widehat{v}_h \quad (1.32)$$

$$z_h = \begin{cases} \xi_h & \text{sur } \overline{B_\rho} \\ v_h & \text{sur } B_1 \setminus \overline{B_\rho}. \end{cases} \quad (1.33)$$

On remarque que d'après (1.22), on a $z_h = w_h$ sur $B_1 \setminus \overline{\Omega_{\phi_h}}$ et d'après (1.13),

$$E(v_h, \tau_h, \overline{B_\rho} \cap \Omega_{\phi_h}) \leq E(z_h, \tau_h, \overline{B_\rho} \cap \Omega_{\phi_h})$$

d'où

$$\begin{aligned} E(v_h, \tau_h, \overline{B_\rho}) &\leq E(z_h, \tau_h, \overline{B_\rho}) \\ &\leq E(\xi_h, \tau_h, \overline{B_\rho}) + \tau_h \mathcal{H}^{n-1}(\{\widehat{v}_h \neq v_h\} \cap \partial B_\rho) \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le lemme 3.6 p. 667 de [CL90], pour tout $0 < l < 1$, on a

$$\begin{aligned} E(\xi_h, \tau_h, \overline{B_\rho}) &\leq \frac{1}{1-l} (E(\zeta_h, \tau_h, \overline{B_\rho}) + E(\widehat{v}_h, \tau_h, \overline{B_\rho} \setminus B_{\rho_3, -\delta_2})) + \\ &\quad \frac{2}{l(\rho_4 - \rho_3)^2} \int_{B_\rho \setminus B_{\rho_3, -\delta_2}} |\zeta_h - \widehat{v}_h|^2 dx \quad (1.34) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E(\zeta_h, \tau_h, \overline{B_\rho}) &\leq \frac{1}{1-l} (E(v_\infty, \tau_h, \overline{B_\rho}) + E(w'_h, \tau_h, \overline{B_\rho} \setminus B_{\rho_1, \delta_1})) + \\ &\quad \frac{2}{l} \left(\frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} + \frac{1}{(\delta_2 - \delta_1)^2} \right) \int_{B_\rho \setminus B_{\rho_1, \delta_1}} |w'_h - v_\infty|^2 dx \quad (1.35) \end{aligned}$$

Alors, d'après (i) on a

$$E(v_\infty, \tau_h, \overline{B_\rho}) = \int_{B_\rho} |\nabla v_\infty|^2 dx.$$

Comme $\mathcal{H}^{n-1}(S_{w'_h}) = 0$ et par (1.28),

$$\begin{aligned} E(w'_h, \tau_h, \overline{B_\rho} \setminus B_{\rho_1, \delta_1}) &= \int_{B_\rho \setminus B_{\rho_1, \delta_1}} |\nabla w'_h|^2 dx \\ &\leq L^2 |B_\rho \setminus B_{\rho_1, \delta_1}| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Par (1.25), on a

$$\int_{B_\rho \setminus B_{\rho_1, \delta_1}} |w'_h - v_\infty|^2 dx \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow \infty.$$

Sur $B_\rho \setminus B_{\rho_3, -\delta_2}$, $\zeta_h = w'_h$. Or, comme $w'_h \rightarrow v_\infty$ dans $L^\infty(B_\rho)$ et $\widehat{v}_h \rightarrow v_\infty$ dans $L^2(B_\rho)$, alors

$$\int_{B_\rho \setminus B_{\rho_3, -\delta_2}} |\widehat{v}_h - \zeta_h|^2 dx \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow \infty.$$

Alors, en reportant (1.34) dans (1.35) et en faisant tendre h vers l'infini, on obtient :

$$a(\rho) \leq \frac{1}{(1-l)^2} \left(\int_{B_\rho} |\nabla v_\infty|^2 dx + \varepsilon \right) + \frac{1}{1-l} \limsup E(\widehat{v}_h, \tau_h, \overline{B_\rho} \setminus B_{\rho_3, -\delta_2})$$

En remarquant que $E(\widehat{v}_h, \tau_h, B_\rho \setminus B_{\rho_3, -\delta_2}) \leq E(v_h, \tau_h, B_\rho \setminus B_{\rho_3, -\delta_2})$, on a alors

$$\begin{aligned} E(\widehat{v}_h, \tau_h, \overline{B_\rho} \setminus B_{\rho_3, -\delta_2}) &\leq E(u_h, \tau_h, \overline{B_\rho} \setminus B_{\rho_1, -\delta_2}) \\ &= E(u_h, \tau_h, \overline{B_\rho} \setminus B_{\rho_1}) - \int_{B_{\rho_1} \setminus B_{\rho_1, -\delta_2}} |\nabla u_h| dx. \end{aligned}$$

Comme sur B_{ρ_1} , on a $u_h = U_h$ et que $\nabla U_h \rightarrow 0$ uniformément sur B_1 , il vient

$$a(\rho) \leq \frac{1}{(1-l)^2} \left(\int_{B_\rho} |\nabla v_\infty|^2 dx + \varepsilon \right) + \frac{1}{1-l} (a(\rho) - a(\rho_1))$$

et par (1.27), que

$$a(\rho) \leq \frac{1}{(1-l)^2} \left(\int_{B_\rho} |\nabla v_\infty|^2 dx + \varepsilon \right) + \frac{1}{1-l} \varepsilon$$

Enfin, par l'arbitraireté de l et de ε , on obtient

$$a(\rho) \leq \int_{B_\rho} |\nabla v_\infty|^2 dx,$$

ce qui conclut la preuve du point iv.)

On a alors tous les éléments pour achever notre démonstration. Soit V , définie par

$$V(x) = \begin{cases} v_\infty(x) & \text{si } x_n \geq 0; \\ -v_\infty(x', -x_n) & \text{si } x_n > 0. \end{cases}$$

Comme v_∞ est harmonique sur $\{x \in B_1 ; x_n \geq 0\}$, V est harmonique sur B_1 et on a alors,

$$\begin{aligned} a(\rho) &= \int_{B_\rho} |\nabla v_\infty|^2 dx = \int_{B_\rho \cap \{x_n > 0\}} |\nabla v_\infty|^2 dx \\ &= \int_{B_\rho \cap \{x_n > 0\}} |\nabla V|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_\rho} |\nabla V|^2 dx. \end{aligned}$$

Or, comme V est harmonique, on a $\int_{B_\rho} |\nabla V|^2 dx = \rho^n \int_{B_1} |\nabla V|^2 dx$ et donc

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} |\nabla v_\infty|^2 dx &\leq \frac{1}{2} \rho^n \int_{B_1} |\nabla V|^2 dx \\ &\leq \rho^n \int_{B_1} |\nabla v_\infty|^2 dx \end{aligned}$$

Alors, pour presque tout ρ tel que $\rho < \alpha < 1$, on a

$$\alpha^{n-\beta} < \lim_h E(v_h, \tau_h, \overline{B_\alpha}) \leq \lim_h E(v_h, \tau_h, \overline{B_\rho}) = a(\rho),$$

et comme pour presque tout ρ ,

$$\begin{aligned} a(\rho) &= \int_{B_\rho} |\nabla v_\infty|^2 dx \\ &\leq \rho^n \int_{B_1} |\nabla v_\infty|^2 dx. \end{aligned}$$

En utilisant (1.23) pour $\rho = 1$, on obtient alors $a(\rho) \leq \rho^n$, donc $\alpha^{n-\beta} \leq \rho^n$ et donc $\alpha^{n-\beta} \leq \alpha^n$. Ceci implique que $1 \leq \alpha^\beta$, ce qui est impossible et le lemme 1.2.8 est donc prouvé.

□

Soit alors $x \in \left(\partial\Omega \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M) \right) \cap \Omega_0$. D'après les hypothèses de régularité sur $\partial\Omega$ et pour ρ assez petit, il existe une fonction ϕ , Lipschitz et de classe \mathcal{C}^1 , paramétrisant $\partial\Omega$ sur $B_{2\rho}(x)$.

Rappelons que l'on a choisi x et ρ tels que $B_{2\rho}(x) \cap M = B_{2\rho}(x) \cap \overset{\circ}{\mathcal{N}} = \emptyset$.

Soit $0 < \alpha_0 < 1$, $0 < \beta < 1$ et ε_0 et θ_0 (dépendant de α_0 et de β) donnés par le lemme 1.2.8. Comme $x \in \Omega_0$, pour ρ assez petit, on a $E(u, \lambda, B_{2\rho}(x)) \leq \lambda \varepsilon_0 \rho^{n-1}$ et pour tout $x_0 \in B_\rho(x) \cap \partial\Omega$, $E(u, \lambda, B_\rho(x_0)) \leq \lambda \varepsilon_0 \rho^{n-1}$ et donc

$$\mathcal{H}^{n-1}(S_u \cap \overline{B_\rho(x_0)}) \leq \varepsilon_0 \rho^{n-1}.$$

Comme $U \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$, alors U est Lipschitz sur $B_\rho(x_0)$. Soit donc L tel que $\text{Lip}_{B_\rho(x_0)} U \leq L$.

Soit $0 < \alpha < 1$ tel que

$$\alpha^{1-\beta} ((\|\nabla U\|_\infty^2 + \lambda \cdot n) \omega_n + C \omega_{n-1}) \leq \varepsilon_0 \quad (1.36)$$

où C est la constante de la remarque 1.2.4 et ε et θ comme dans le lemme 1.2.8.

Afin de se placer dans le cadre du lemme 1.2.8 et en utilisant la remarque 1.2.5, on peut supposer, à une translation et une rotation près, que $x_0 = 0$ et que

$$\phi(0) = |\nabla \phi(0)| = 0.$$

De plus, comme ϕ est Lipschitz sur B_ρ , et comme $\rho \rightarrow \text{Lip}_{B_\rho} \phi$ est décroissante, on peut supposer que

$$\text{Lip}_{B_\rho} \phi \leq 1.$$

Soient enfin $0 < r_0 \leq \rho$ tel que

$$\max(\theta_0, \theta) \left((\text{Lip}_{B_{r_0}} \phi)^2 + r_0 L^2 \right) \leq \varepsilon$$

et $0 < r \leq r_0$ tel que

$$\mathcal{H}^{n-1}(S_u \cap \overline{B_r(x_0)}) \leq \varepsilon r^{n-1}.$$

On définit alors les fonctions

$$\begin{aligned} u_r(x) &= \frac{1}{\sqrt{r}} u(rx) \\ U_r(x) &= \frac{1}{\sqrt{r}} U(rx) \\ \phi_r(x') &= \frac{1}{\sqrt{r}} \phi(rx') \end{aligned}$$

et on remarque que

$$\begin{aligned} u_r &\in M(\lambda, B_1) \\ u_r &= U_r \text{ sur } B_1 \setminus \Omega_{\phi_r} \\ \mathcal{H}^{n-1}(S_{u_r}) &\leq \varepsilon \\ \text{Lip}_{B_1} \phi_r &\leq 1 \end{aligned}$$

On alors peut appliquer alors le lemme 1.2.8 et on obtient

$$\begin{aligned} E(u_r, \lambda, \overline{B_\alpha}) &\leq \alpha^{n-\beta} \max(E(u_r, \lambda, \overline{B_1}), \theta((\text{Lip}_{B_1}\phi_r)^2 + (\text{Lip } U_r)^2)) \\ &\leq \alpha^{n-\beta} \max(E(u_r, \lambda, \overline{B_1}), \theta((\text{Lip}_{B_1}\phi_r)^2 + r(\text{Lip } U)^2)) \\ &\leq \alpha^{n-\beta} \max(E(u_r, \lambda, \overline{B_1}), \varepsilon) \end{aligned}$$

Alors, d'après la construction de u_r , on a

$$E(u, \lambda, \overline{B_{\alpha r}}) \leq \alpha^{n-\beta} \max(E(u, \lambda, \overline{B_r}), r^{n-1} \varepsilon)$$

et en appliquant la remarque 1.2.4 puis en utilisant (1.36), il vient

$$E(u, \lambda, \overline{B_{\alpha r}}) \leq \varepsilon(\alpha r)^{n-1}. \quad (1.37)$$

Soit maintenant $r' = \alpha r$. On a alors $\mathcal{H}^{n-1}(S_u \cap \overline{B_{r'}}) \leq \varepsilon(r')^{n-1}$. En appliquant une nouvelle fois le lemme 1.2.8, puis en faisant le même raisonnement que précédemment, on a

$$E(u, \lambda, \overline{B_{\alpha r'}}) \leq \alpha^{n-\beta} \max(E(u, \lambda, \overline{B_{r'}}), \varepsilon(r')^{n-1})$$

et en utilisant (1.37),

$$E(u, \lambda, \overline{B_{\alpha r'}}) \leq \varepsilon(r')^{n-1}.$$

En itérant ce raisonnement, on obtient donc que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$E(u, \lambda, \overline{B_{\alpha^k r}}) \leq \alpha^{k(1-\beta)} \varepsilon(\alpha^k r)^{n-1}.$$

Soit maintenant $t < r$, tel que $\alpha^k r \leq t < \alpha^{k-1} r$. On a alors $E(u, \lambda, \overline{B_t}) \leq E(u, \lambda, \overline{B_{\alpha(k-1)r}})$ et donc :

$$\begin{aligned} t^{1-n} E(u, \lambda, \overline{B_t}) &\leq t^{1-n} E(u, \lambda, \overline{B_{\alpha^{(k-1)r}}}) \\ &\leq (\alpha^k r)^{1-n} E(u, \lambda, \overline{B_{\alpha^{(k-1)r}}}) \\ &\leq (\alpha^k r)^{1-n} \alpha^{(k-1)(1-\beta)} \varepsilon(\alpha^{k-1} r)^{n-1} \\ &\leq \alpha^{(k-1)(1-\beta)} \alpha^{1-n} \varepsilon \end{aligned}$$

Quand $t \rightarrow 0$, alors $k \rightarrow \infty$ et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E(u, \lambda, \overline{B_t})}{t^{n-1}} = 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E(u, \lambda, \overline{B_t} \cap \overline{\Omega})}{t^{n-1}} = 0.$$

Ceci nous permet donc de conclure que $x_0 \in \Omega_0$. En rappelant de plus, qu'on avait choisi x_0 arbitraire dans $B_\rho(x) \cap \partial\Omega$, on a

$$B_\rho(x) \cap \partial\Omega \subset \Omega_0$$

ce qui nous permet de prolonger le résultat obtenu à l'intérieur de Ω , dans [DGCL89] à $\overline{\Omega}$. On peut donc conclure que

$$\Omega_0 \text{ est relativement ouvert dans } \overline{\Omega} \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M).$$

La dernière étape pour achever la preuve de la proposition 1.2.7 est de montrer que $\mathcal{H}^{n-1}((\overline{S_u} \setminus \mathcal{N})) \setminus (S_u \setminus \mathcal{N}) = 0$.

Soit K , un compact de \mathbf{R}^n tel que $E(u, \lambda, K) < \infty$ et pour tout $t > 0$, $K_t = \{x \in K \setminus S_u ; \limsup_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1-n} E(u, \lambda, B_\rho(x)) \geq t\omega_{n-1}\}$. Pour tout A ouvert de \mathbf{R}^n tel que $A \supset K$, on a d'après [Fed69], 2.10.19(3) p. 181

$$E(u, \lambda, K) \geq t\mathcal{H}_S^{n-1}(K_t) \geq t\mathcal{H}^{n-1}(K_t).$$

En remarquant alors que $E(u, \lambda, K) = \inf \{E(u, \lambda, A) ; A \text{ ouvert et } K \subseteq A\}$ et que $S_u \cap K_t = \emptyset$, on obtient

$$\int_{K_t} |\nabla u|^2 dx = E(u, \lambda, K_t) \geq t\mathcal{H}^{n-1}(K_t).$$

Comme $\nabla u \in L^2(\Omega)$, $\int_{K_t} |\nabla u|^2 dx < \infty$, $\mathcal{H}^{n-1}(K_t) < \infty$ pour tout $t > 0$ et donc, d'après les propriétés élémentaires des mesures de Hausdorff, $|K_t| = 0$. Alors, $\int_{K_t} |\nabla u|^2 dx = 0$ et $\mathcal{H}^{n-1}(K_t) = 0$ pour tout $t > 0$.

Prenons alors $K = \overline{\Omega}$. Par l'arbitraire de t et la définition de Ω_0 , on peut donc conclure que \mathcal{H}^{n-1} -presque tout $x \in (\overline{\Omega} \setminus S_u)$ est dans Ω_0 , donc que $\mathcal{H}^{n-1}((\overline{\Omega} \setminus \Omega_0) \setminus S_u) = 0$ et que

$$\mathcal{H}^{n-1}((\overline{\Omega} \setminus \mathcal{N}) \setminus \Omega_0) \setminus (S_u \setminus \mathcal{N}) = 0. \quad (1.38)$$

La preuve de la proposition 1.2.7 est maintenant immédiate :

Comme $S_u \subset \overline{\Omega} \setminus \Omega_0$ et en notant que $\overline{\Omega} = (\overline{\Omega} \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M)) \cup (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M)$, on a

$$S_u \subset (\overline{\Omega} \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M)) \setminus \Omega_0 \cup (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M) \setminus \Omega_0,$$

donc

$$S_u \setminus \mathcal{N} \subset (\overline{\Omega} \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M)) \setminus \Omega_0 \setminus \mathcal{N} \cup (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M) \setminus \Omega_0 \setminus \mathcal{N}$$

et

$$S_u \setminus \mathcal{N} \subset (\overline{\Omega} \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M)) \setminus \Omega_0 \setminus \mathcal{N} \cup M.$$

On a alors

$$S_u \setminus \mathcal{N} \subset (\overline{\Omega} \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M)) \setminus \Omega_0 \cup M$$

et comme Ω_0 est relativement ouvert dans $\overline{\Omega} \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M)$, alors $(\overline{\Omega} \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M)) \setminus \Omega_0$ est fermé. Alors,

$$\overline{S_u \setminus \mathcal{N}} \subset (\overline{\Omega} \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M)) \setminus \Omega_0 \cup M$$

donc

$$\overline{(S_u \setminus \mathcal{N})} \setminus (S_u \setminus \mathcal{N}) \subset ((\overline{\Omega} \setminus (\overset{\circ}{\mathcal{N}} \cup M)) \setminus \Omega_0) \setminus (S_u \setminus \mathcal{N}) \cup M \setminus (S_u \setminus \mathcal{N})$$

et

$$\overline{(S_u \setminus \mathcal{N})} \setminus (S_u \setminus \mathcal{N}) \subset ((\overline{\Omega} \setminus \mathcal{N}) \setminus \Omega_0) \setminus (S_u \setminus \mathcal{N}) \cup M$$

Enfin, d'après (1.38) et comme $\mathcal{H}^{n-1}(M) = 0$, on obtient que

$$\mathcal{H}^{n-1}((\overline{S_u \setminus \mathcal{N}}) \setminus (S_u \setminus \mathcal{N})) = 0$$

ce qui conclut la preuve de la proposition 1.2.7.

□

Ce résultat de régularité de S_u permet alors de montrer la proposition suivante :

Proposition 1.2.9. *Soit $U \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$, $\lambda > 0$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ouvert borné et \mathcal{N} vérifiant les hypothèses suivantes*

- i) Il existe $M \subset \partial\Omega$, fermé tel que $\mathcal{H}^{n-1}(M) = 0$ et $\partial\Omega$ est Lipschitz et de classe \mathcal{C}^1 en dehors de M ;
- ii) Il existe $\mathcal{N} \subset \partial\Omega$, fermé, tel que $\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{N} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{N}}) = 0$

et u , une solution du problème faible (1.4). Alors,

$$u \in \mathcal{C}^1(\Omega \setminus \overline{S_u \cup \mathcal{N}})$$

et

$$E(u, \lambda, \overline{\Omega} \setminus \mathcal{N}) = \mathcal{E}(u, \lambda, \overline{S_u \setminus \mathcal{N}}).$$

Preuve de la proposition 1.2.9.

Soit u , une solution du problème faible (1.4). Alors, $\Delta u = 0$ sur $\Omega \setminus (\overline{S_u \cup \mathcal{N}})$ donc $u \in W_{loc}^{2,p}(\Omega \setminus (\overline{S_u \cup \mathcal{N}}))$ pour tout $p \leq \infty$ et $u \in \mathcal{C}^1(\Omega \setminus (\overline{S_u \cup \mathcal{N}}))$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, \lambda, \overline{S_u \setminus \mathcal{N}}) &= \int_{\Omega \setminus (\overline{S_u \setminus \mathcal{N}})} |\nabla u|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(\overline{\Omega} \cap (\overline{S_u \setminus \mathcal{N}} \setminus \mathcal{N})) \\ &\leq \int_{\Omega \setminus (S_u \setminus \mathcal{N})} |\nabla u|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(\overline{\Omega} \cap S_u \setminus \mathcal{N}) \\ &\leq E(u, \lambda, \overline{\Omega} \setminus \mathcal{N}) \end{aligned}$$

Et en utilisant la proposition 1.2.6, on a l'égalité et la proposition est donc prouvée. \square

1.2.5 Existence de la solution du problème fort

Les propositions 1.2.6 et 1.2.9 nous permettent enfin de prouver l'existence d'une solution au problème fort (1.2).

Théorème 1.2.10. Soit $U \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$, $\lambda > 0$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ouvert borné et \mathcal{N} vérifiant les hypothèses suivantes

- i) Il existe $M \subset \partial\Omega$, fermé tel que $\mathcal{H}^{n-1}(M) = 0$ et $\partial\Omega$ est un graphe Lipschitz de classe \mathcal{C}^1 en dehors de M ;
- ii) Il existe $\mathcal{N} \subset \partial\Omega$, fermé, tel que $\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{N} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{N}}) = 0$.

Alors, il existe K' , fermé inclus dans $\overline{\Omega}$ et $v \in \mathcal{C}^1(\Omega \setminus (K' \cap \mathcal{N}); \mathbf{R})$ tels que

$$E(v, \lambda, K') = \min \{ \mathcal{E}(u, \lambda, K) ;$$

$$K \text{ fermé } \subset \overline{\Omega}, u \in \mathcal{C}^1(\Omega \setminus (K \cap \mathcal{N}); \mathbf{R}), u = U \text{ sur } \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega} \} .$$

Soit v_h, K'_h , une suite minimisante du problème fort (1.2). D'après la proposition 1.2.6, pour tout h , on a $v_h \in SBV(\mathbf{R}^n)$ et

$$\mathcal{E}(v_h, \lambda, K'_h) \geq E(v_h, \lambda, \overline{\Omega} \setminus \mathcal{N}).$$

Soit alors u , une solution du problème faible (1.4), d'après la proposition 1.2.9, on a $u \in \mathcal{C}^1(\Omega \setminus \overline{S_u \setminus \mathcal{N}})$ et

$$E(u, \lambda, \overline{\Omega} \setminus \mathcal{N}) = \mathcal{E}(u, \lambda, \overline{S_u \setminus \mathcal{N}})$$

donc

$$\mathcal{E}(v_h, \lambda, K'_h) \geq \mathcal{E}(u, \lambda, \overline{S_u \setminus \mathcal{N}}).$$

Donc, les minimisateurs du problème faible sont des minimisateurs du problème fort et ce dernier admet une solution. \square

1.2.6 Extension à des domaines moins réguliers

Pour les deux estimations précédentes, on a supposé une certaine régularité du domaine $\partial\Omega$ et donc de l'ensemble $\mathcal{N} \subset \partial\Omega$. Ces hypothèses, sans être extrêmement restrictives d'un plan théorique, sont cependant plus fortes que ce que l'on pourrait attendre dans l'optique d'une mise en œuvre numérique du problème. En effet, dans la perspective de simulations en mécanique de la rupture, il est nécessaire de s'affranchir de ces hypothèses, afin de pouvoir traiter des exemples concrets et, en particulier, il est important de pouvoir appliquer cette méthode à des domaines fissurés.

Remarquons tout d'abord que la régularité de S_u , et celle de $\partial\Omega$ n'interviennent pas dans la section 1.2.3 (proposition 1.2.6).

Par contre, la méthode de «Blow-Up» utilisée pour la preuve du lemme 1.2.8 utilise de façon essentielle le fait qu'on puisse paramétriser $\partial\Omega \setminus (M \cup \mathcal{N})$ localement par des fonctions Lipschitz. L'hypothèse sur \mathcal{N} ($\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{N} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{N}})$) n'est utilisée, elle que pourachever la preuve de la proposition 1.2.9.

Supposons Ω de périmètre fini. Alors, d'après le théorème 2, sec. 5.7.3, p. 205 de [EG92] la frontière réduite $\partial^*\Omega$ est telle que

$$\partial^*\Omega = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \right) \cup M_0$$

où C_k est un sous ensemble compact d'une hypersurface \mathcal{C}^1 et $\|\partial\Omega\|(M_0) = 0$. Si de plus \mathcal{H}^{n-1} -presque tout point de $\partial\Omega \setminus (M \cup \mathcal{N})$ vérifie

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{|B_r(x) \cap \Omega|}{\omega_n r^n} > 0$$

et

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{|B_r(x) \setminus \Omega|}{\omega_n r^n} > 0$$

alors

$$\mathcal{H}^{n-1}([\partial\Omega \setminus (M \cup \mathcal{N})] \setminus [\partial_\star\Omega \setminus (M \cup \mathcal{N})]) = 0.$$

Alors, comme $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_\star\Omega \setminus \partial^*\Omega) = 0$, on obtient la régularité escompté de $\partial\Omega \setminus (M \cup \mathcal{N})$.

Soit enfin $\mathcal{N}_0 \subset \mathbf{R}^n$ tel que $\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{N}_0) < \infty$ et $\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{N}_0 \setminus \overset{\circ}{\mathcal{N}}_0) = 0$, $\Omega_1 = \Omega \setminus \mathcal{N}_0$ et $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N} \cup \mathcal{N}_0$. Alors, Ω_1 vérifie les hypothèses de régularité énoncée au début du chapitre 2.

Ainsi, on peut étendre les résultats des sections 1.2.3 et 1.2.4 à des domaines Ω de périmètre fini et des courbes \mathcal{N} tels que

- $\mathcal{H}^{n-1}(N) < \infty$, $\mathcal{H}^{n-1}(N \setminus \overset{\circ}{N}) = 0$;
- $\partial\Omega \setminus N = \partial_\star\Omega \setminus N \cup M$, et $\mathcal{H}^{n-1}(M) = 0$.

Ce qui permet bien de prendre en compte des domaines «fissurés». Notons cependant qu'on ne peut pas imposer de déplacement sur les lèvres des fissures du domaine.

1.3 Méthode de minimisation

1.3.1 Présentation de la méthode

Dans ce qui suit, on construit une approximation de E , on prouve les propriétés de Γ -limite supérieure et de Γ -limite inférieure, puis on montre l'existence de solution au problème induit par E_c et la compacité de la suite de ses minimiseurs.

Remarque 1.3.1. *Dans ce qui suit, et pour alléger les notations, on indexe des suites par des réels tendant vers 0. Par une telle suite u_c , on désigne en réalité la suite u_{c_i} , indexée par i où $c_i \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow \infty$. De plus, conformément à la remarque 1.2.5, on peut supposer, à une mise à l'échelle près, que $\lambda = 1$.*

Pour montrer l'inégalité inférieure de Γ -convergence, on utilise une méthode de localisation. On définit pour tous A et B , ouverts bornés de \mathbf{R}^n , tout $N \subset \partial A$ et toute fonction $u \in SBV(C)$, telle que $u = U$ sur $C \setminus \overline{A}$, une version localisée

de E :

$$E(u, A, N, C) = \int_{A \cap C} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{n-1}((S_u \setminus N) \cap C). \quad (1.39)$$

On introduit alors une seconde variable v et pour les mêmes A, N, C on note

$$X(N, C) = \{(u, v) \in (W^{1,2}(C \setminus N) \cap L^\infty(C)) \times W^{1,2}(C \setminus N; [0, 1])\}$$

et sur cet ensemble, on définit notre fonctionnelle régularisée

$$E_c(u, v, A, N, C) = \int_{(A \setminus N) \cap C} (v^2 + k_c) |\nabla u|^2 dx + \int_{C \setminus N} c |\nabla v|^2 + \frac{(1-v)^2}{4c} dx.$$

Afin de pouvoir définir une notion de convergence entre E et E_c , on définit les deux fonctionnelles suivantes :

$$F(u, v, A, N, C) = \begin{cases} E(u, A, N, C) & \text{si } u \in SBV(C) \\ & v = 1 \text{ presque partout sur } C \\ & u = U \text{ sur } C \setminus \overline{A}; \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$F_c(u, v, A, N, C) = \begin{cases} E_c(u, A, N, C) & \text{si } (u, v) \in X(N, C) \\ & u = U \text{ sur } C \setminus \overline{A_{2c}} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\overline{A_{2c}} = \{x; d(x, \overline{A}) \leq 2c\}$, $d(x, \overline{A})$ représentant la distance de x à \overline{A} .

On est alors en mesure d'énoncer le théorème de Γ -convergence suivant :

Théorème 1.3.2. Soit $\tilde{\Omega}$, un ouvert borné de \mathbf{R}^n tel que $\overline{\Omega}_{2c} \subset \tilde{\Omega}$, $U \in W^{1,\infty}(\tilde{\Omega})$ et u telle que $u = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$. Alors, si $\lim_{c \rightarrow 0} k_c/c = 0$,

i) pour toute suite $(u_c, v_c) \in X(\mathcal{N}, \tilde{\Omega})$ telle que $u_c \xrightarrow{L^2(\tilde{\Omega})} u$, $u = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$ et $v_c \xrightarrow{L^2(\tilde{\Omega})} v$, on a

$$\liminf_{c \rightarrow 0} F_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \geq F(u, v, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}); \quad (1.40)$$

ii) si $\lim_{\rho \searrow 0} \frac{|(S_u \setminus \mathcal{N})_\rho|}{2\rho} = \mathcal{H}^{n-1}(S_u \setminus \mathcal{N})$, alors il existe une suite $(u_c, v_c) \in X(\mathcal{N}, \tilde{\Omega})$ telle que $u_c \xrightarrow{L^2(\tilde{\Omega})} u$, $u = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$ et $v_c \xrightarrow{L^2(\tilde{\Omega})} v$ et

$$\limsup_{c \rightarrow 0} F_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \leq F(u, v, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}); \quad (1.41)$$

iii) Il existe $(u_c, v_c) \in X(\Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega})$ telle que $u = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$, minimisant E_c et la suite des minimisateurs de F_c est compacte dans L^2 .

1.3.2 Estimation de la Γ -limite inférieure

Pour prouver l'inégalité (1.40), on peut supposer sans perte de généralité que $\liminf_{c \rightarrow 0} F_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) < \infty$ et même, à une extraction de sous suite près, que la limite existe.

On utilise alors deux méthodes usuelles, une méthode de localisation, afin d'établir des estimations différentes «près des bords» et «loin des bords» et un raisonnement par sections qui permet de déduire du comportement de E_c sur des sections du domaines, son comportement sur le domaine entier. Le plan de cette preuve reprend celui proposé dans [AT92], tout en détaillant avec précision les deux arguments évoqués plus haut.

Dans un premier temps, on établit une version locale de (1.40) et pour cela, on démontre le résultat suivant, en dimension 1, adaptation du lemme 2.1 p. 113 dans [AT92].

Lemme 1.3.3. *Soit $x \in \mathbf{R}$, $\eta > 0$ et $A =]x - \eta, x + \eta[$. Soit B , un intervalle ouvert de \mathbf{R} , contenant A et J , un ensemble fini de points de B . Soient $(u_c, v_c) \in X(J, B)$ telles que $(u_c, v_c) \xrightarrow{L^2(B)} (u, v) \in (L^2(B))^2$.*

Alors, les deux assertions suivantes sont vraies :

i) *si $u \notin W^{1,2}(]x - \eta/2, x + \eta/2[\setminus J)$, alors*

$$1 \leq \liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c, v_c, A, J, B); \quad (1.42)$$

ii) *si $u \in W^{1,2}(]x - \eta, x + \eta[\setminus J)$, alors,*

$$\int_{(A \cap B) \setminus J} |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c, v_c, A, J, B). \quad (1.43)$$

On prouve d'abord ce lemme dans le cas où $J = \emptyset$, puis on montre comment prendre en compte cet ensemble.

Si $\liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c, v_c, A, J, B) = \infty$, le résultat est trivial. On peut donc supposer qu'il existe l tel que $\liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c, v_c, A, J, B) = l < \infty$, et même, à une extraction de suite près, que la limite de $E_c(u_c, v_c, A, J, B)$ existe.

Placons nous tout d'abord dans le premier cas. Alors

$$\lim_{c \rightarrow 0} \inf_{]x - \eta/2, x + \eta/2[} v_c = 0.$$

En effet, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\liminf_{c \rightarrow 0} \inf_{]x-\eta/2, x+\eta/2[} v_c = \varepsilon$. Alors, on a $\liminf_{c \rightarrow 0} \int_{]x-\eta/2, x+\eta/2[\cap C} (\varepsilon^2 + k_c) |\nabla u_c|^2 dx \leq \liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c, v_c, A, J, B) = l$ donc ∇u_c est uniformément borné dans $W^{1,2}(]x - \eta/2, x + \eta/2[)$. Ceci implique alors que $u \in W^{1,2}(]x - \eta/2, x + \eta/2[)$, ce qui est contraire à notre hypothèse.

De plus, $(1 - v_c)^2/4c$ est bornée dans $L^1(B)$ et donc

$$v_c \rightarrow 1 \text{ presque partout sur }]x - \eta, x + \eta[.$$

Alors, il existe trois suites, x_c , y'_c et y''_c telles que

$$\begin{aligned} x - \eta &< y'_c < x_c < y''_c < x + \eta; \\ \lim_{c \rightarrow 0} v_c(y'_c) &= \lim_{c \rightarrow 0} v_c(y''_c) = 1; \\ x - \eta/2 &< x_c < x + \eta/2; \\ \lim_{c \rightarrow 0} v_c(x_c) &= 0. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} E_c(u_c, v_c, A, \emptyset, B) &\geq \int_B c|v'_c|^2 + \frac{(1 - v_c)^2}{4c} dx \\ &\geq \int_{y'_c}^{x_c} c|v'_c|^2 + \frac{(1 - v_c)^2}{4c} dx + \int_{x_c}^{y'_c} c|v'_c|^2 + \frac{(1 - v_c)^2}{4c} dx \\ &\geq \int_{y'_c}^{x_c} |v'_c|(1 - v_c) dx + \int_{x_c}^{y'_c} |v'_c|(1 - v_c) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{y'_c}^{x_c} \left| ((1 - v_c)^2)' \right| dx + \frac{1}{2} \int_{x_c}^{y'_c} \left| ((1 - v_c)^2)' \right| dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left| \int_{y'_c}^{x_c} ((1 - v_c)^2)' dx \right| + \frac{1}{2} \left| \int_{x_c}^{y'_c} ((1 - v_c)^2)' dx \right| \\ &\geq \frac{1}{2} \left| (1 - v_c(x_c))^2 - (1 - v_c(y'_c))^2 \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \left| (1 - v_c(x_c))^2 - (1 - v_c(y''_c))^2 \right| \end{aligned}$$

et en prenant la limite inférieure, quand $c \rightarrow 0$, on obtient

$$1 \leq \liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c, v_c, A, \emptyset, B)$$

ce qui prouve la première assertion, dans le cas où $J = \emptyset$.

Si $u \in W^{1,2}(]x - \eta, x + \eta[)$, on montre comme précédemment que $v_c \xrightarrow{p.p.} 1$ et donc, d'après le théorème d'Egoroff, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe I_ε , tel que $|I_\varepsilon| < \varepsilon$

et que v_c converge uniformément vers 1 sur $B \setminus I_\varepsilon$. Alors, pour tout ζ assez petit, $v_c^2 \geq 1 - \zeta$ sur $B \setminus I_\varepsilon$ dès que c est assez petit et donc

$$\begin{aligned} \int_A (v_c^2 + k_c) |\nabla u_c|^2 dx &\geq \int_{A \setminus I_\varepsilon} (v_c^2 + k_c) |\nabla u_c|^2 dx \\ &\geq \int_{A \setminus I_\varepsilon} (1 + k_c) |\nabla u_c|^2 dx \\ &\quad + \int_{A \setminus I_\varepsilon} (v_c^2 - 1) |\nabla u_c|^2 dx \\ &\geq \int_{A \setminus I_\varepsilon} (1 + k_c) |\nabla u_c|^2 dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{A \setminus I_\varepsilon} |\nabla u_c|^2 dx \end{aligned}$$

De plus, comme sur $v_c^2 \geq 1 - \zeta$ sur $A \setminus I_\varepsilon$, alors ∇u est uniformément borné dans $L^2(A \setminus I_\varepsilon)$ et par la semi-continuité de $u \rightarrow \int |\nabla u|^2 dx$, on a

$$\liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c, v_c, A, \emptyset, B) \geq (1 - \zeta) \int_{A \setminus I_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx.$$

Enfin, par l'arbitraireté de ε et de ζ et comme $\nabla u \in L^2([x - \eta, x + \eta])$, on conclut que

$$\liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c, v_c, [x - \eta, x + \eta], \emptyset, B) \geq \int_{[x - \eta, x + \eta]} |\nabla u|^2 dx.$$

De ce résultat, il est aisément déduire le lemme 1.3.3.

En effet, si $J \cap [x - \eta/2, x + \eta/2] \neq \emptyset$, et comme J est constitué d'un nombre fini de points, il existe au moins un sous-ensemble de $[x - \eta, x + \eta] \setminus J$ sur lequel u n'est pas dans $W^{1,2}$ sur lequel on applique la méthode utilisée dans la première partie et on en déduit (1.42). La démonstration de la deuxième partie du lemme, quant à elle, demeure inchangée, dans la mesure où le fait que A et B soient des intervalles ne joue aucun rôle d'où (1.43). \square

Soit maintenant $x \in \mathbf{R}^n$ et $\nu \in S^{n-1}$. Pour tout ensemble A de \mathbf{R}^n , on définit la section de A d'origine x dans direction ν ,

$$A^{x,\nu} = \{y \in A; \exists t \in \mathbf{R}, y = x + tv\}.$$

De même, on définit la restriction d'une fonction u , à $A^{x,\nu}$,

$$u^{x,\nu}(t) = u(x + t\nu).$$

Montrons d'abord une estimation locale de la Γ -limite inférieur de E_c . Soit (u, v) et (u_c, v_c) , vérifiant les hypothèses du théorème 1.3.2, $A \subset B \subset \tilde{\Omega}$ ouverts et $N = \mathcal{N} \cap B$. En remarquant que $B \rightarrow E_c(u_c, v_c, A, N, B)$ est sous-additive, il est aisément de déduire du lemme 1.3.3 que

$$\begin{aligned} \liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c^{x,\nu}, v_c^{x,\nu}, A, N, B) &\geq \\ &\int_{(A^{x,\nu} \cap B^{x,\nu}) \setminus N^{x,\nu}} |u'^{x,\nu}|^2 dx + \mathcal{H}^0((S_{u^{x,\nu}} \setminus N^{x,\nu}) \cap B^{x,\nu}) \end{aligned}$$

Alors, en intégrant sur $(B^{x,\nu})^\perp$ et grâce au théorème de sections [Amb89] 3.2 p. 15 et au lemme de Fatou, on obtient que pour tout $\nu \in S^{n-1}$,

$$\liminf_{c \rightarrow 0} (E_c(u_c, v_c, A, N, B)) \geq \int_{A \setminus N} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 dx + \int_{(S_u \cap B) \setminus N} |\langle \nu_u, \nu \rangle| d\mathcal{H}^{n-1}(x). \quad (1.44)$$

Tous ces éléments nous permettent enfin d'établir l'estimation de la Γ -limite inférieure (1.40). Comme dans le lemme 1.3.3, on peut supposer sans perte de généralité que $\liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) < \infty$, et même que la limite existe et est finie.

Montrons tout d'abord que $E(u, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \leq \liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega})$. On a

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{n-1}((S_u \cap \tilde{\Omega}) \setminus \mathcal{N}) \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \sup_{\nu \in S^{n-1}} \{ |\langle \nabla u, \nu \rangle|^2 d\mathcal{L}^n(\Omega \setminus \mathcal{N}) + |\langle \nu_u, \nu \rangle| d\mathcal{H}^{n-1}(S_u \setminus \mathcal{N}) \} \\ &= \lim_{k \nearrow \infty} \int_{\tilde{\Omega}} \sup_{i=1, \dots, k} \{ |\langle \nabla u, \nu_i \rangle|^2 d\mathcal{L}^n(\Omega \setminus \mathcal{N}) + |\langle \nu_u, \nu_i \rangle| d\mathcal{H}^{n-1}(S_u \setminus \mathcal{N}) \} \\ &= \lim_{k \nearrow \infty} \sup \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{B_i} |\langle \nabla u, \nu_i \rangle|^2 d\mathcal{L}^n(\Omega \setminus \mathcal{N}) + |\langle \nu_u, \nu_i \rangle| d\mathcal{H}^{n-1}(S_u \setminus \mathcal{N}); \right. \\ &\quad \left. B_i \text{ Borels disjoints inclus dans } \tilde{\Omega} \right\} \end{aligned}$$

En approximant, de l'intérieur, les Borels par des compacts, puis en approximant

ces compacts, par l'extérieur, par des ouverts, on a alors

$$\begin{aligned}
 E(u, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) &\leq \\
 \lim_{k \nearrow \infty} \sup & \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{O_i} |\langle \nabla u, \nu_i \rangle|^2 d\mathcal{L}^n(\Omega \setminus \mathcal{N}) + |\langle \nu_u, \nu_i \rangle| d\mathcal{H}^{n-1}(S_u \setminus \mathcal{N}); \right. \\
 & \quad \left. O_i \text{ ouverts disjoints inclus dans } \tilde{\Omega} \right\} \\
 \leq \lim_{k \nearrow \infty} \sup & \left\{ \sum_{i=1}^k \liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, O_i); \right. \\
 & \quad \left. O_i \text{ ouverts disjoints inclus dans } \tilde{\Omega} \right\}
 \end{aligned}$$

donc

$$E(u, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \leq \lim_{k \nearrow \infty} \sup \left\{ \liminf_{c \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k E_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, O_i); \right. \\
 \left. O_i \text{ ouverts disjoints inclus dans } \tilde{\Omega} \right\}$$

et

$$\begin{aligned}
 E(u, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) &\leq \lim_{k \nearrow \infty} \sup \liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \\
 &= \liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}).
 \end{aligned}$$

Pour étendre ce résultat aux fonctionnelles F et F_c , il ne reste alors qu'à montrer que pour tout c , on a $u_c = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_{2c}$, alors $u \in SBV(\tilde{\Omega})$, $u = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$ et que $v = 1$ presque partout sur $\tilde{\Omega}$.

Comme on a supposé la limite inférieure de E_c finie, alors pour toute section $\Omega^{x,\nu}$, on a

$$\liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c^{x,\nu}, v_c^{x,\nu}, \Omega^{x,\nu}, \mathcal{N}^{x,\nu}, \tilde{\Omega}^{x,\nu}) < \infty.$$

Donc, d'après le lemme 1.3.3, pour presque tout $x \in \tilde{\Omega}$ et $\nu \in S^{n-1}$, il existe un ensemble fini de points que l'on notera $S^{x,n} = \{s_1, \dots, s_k\}$ tel que

$$u^{x,\nu} \in W^{1,2}(\tilde{\Omega}^{x,\nu} \setminus (\mathcal{N}^{x,\nu} \cup S^{x,n})).$$

Par un argument de troncature similaire à celui exposé dans la partie précédente (remarque 1.2.2), on peut supposer que $\|u_c^{x,\nu}\|_\infty \leq \|U^{x,\nu}\|_\infty \leq \|U\|_\infty$. Donc, pour presque tout x, ν , $u^{x,\nu} \in SBV(\tilde{\Omega}^{x,\nu})$ et donc, d'après [Amb89], théorème 3.2 p. 15

$$u \in SBV(\tilde{\Omega}).$$

En raisonnant comme dans le lemme, on montre que $v = 1$ presque partout sur $\tilde{\Omega}$ et il ne reste plus qu'à vérifier que $u = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$.

Comme $(u_c, v_c) \in X(\mathcal{N}, \tilde{\Omega})$, on a $u_c = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_{2c}$ et donc

$$u_c \chi_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_{2c}} = U \chi_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_{2c}}.$$

Or, d'après la définition de Ω_c , on a

$$\chi_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_{2c}} \rightarrow \chi_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} \text{ presque partout}$$

et comme $u_c \rightarrow u$ dans $L^2(\tilde{\Omega})$,

$$u_c \chi_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_{2c}} \rightarrow u \chi_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_{2c}} \text{ dans } L^2(\tilde{\Omega})$$

et donc

$$U \chi_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_{2c}} \rightarrow U \chi_{\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} \text{ presque partout.}$$

Ceci prouve donc que u vérifie bien la condition

$$u = U \text{ sur } \tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$$

et donc que

$$F(u, v, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) = E(u, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) < \infty$$

ce qui permet de conclure que

$$F(u, v, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \leq \liminf_{c \rightarrow 0} F_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}).$$

□

1.3.3 Estimation de la Γ -limite supérieure

La construction d'une suite permettant l'estimation de la Γ -limite inférieure, dans notre cas, est très proche de celle effectuée dans [AT92]. Dans tout ce qui suit, et pour tout $A \subset \mathbf{R}^n$ et $0 \leq r \leq s < \infty$, on note $A_r^s = \{x \in \mathbf{R}^n ; r \leq d(A, x) \leq s\}$

(on a alors $A_r = A_0^r$).

De plus, on fait l'hypothèse suivante de régularité sur S_u :

$$L = \lim_{\rho \searrow 0} \frac{|(S_u \setminus \mathcal{N})_\rho|}{2\rho} = \mathcal{H}^{n-1}(S_u \setminus \mathcal{N}). \quad (1.45)$$

Soit alors u, v . Si $F(u, v, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) = \infty$, l'inégalité supérieure de Γ -convergence est triviale et on peut donc supposer que $F(u, v, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) = E(u, v, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) < \infty$, ou, de manière équivalente, que

$$\begin{aligned} u &\in SBV(\tilde{\Omega}); \\ \nabla u &\in L^2(\Omega \setminus \mathcal{N}); \\ v &= 1 \text{ presque partout sur } \tilde{\Omega}. \end{aligned}$$

Montrons alors (1.41).

Soit $a_c, b_c, \eta_c > 0$, tels que $(S_u \setminus \mathcal{N})_{a_c+b_c} \subset \tilde{\Omega}$ et $b_c \ll c$, et u_c, v_c , définis par :

$$u_c = \begin{cases} 0 & \text{sur } (S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c/2}; \\ u & \text{sur } \Omega \setminus (S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c}; \\ U & \text{sur } \tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_c \end{cases}$$

et

$$v_c = \begin{cases} 0 & \text{sur } (S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c}; \\ 1 - \eta_c & \text{sur } \tilde{\Omega} \setminus (S_u \setminus \mathcal{N})_{a_c+b_c}. \end{cases}$$

On peut alors décomposer $E_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega})$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) &= \int_{\Omega \cap (S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c/2}} (v_c^2 + k_c) |\nabla 0|^2 dx + \int_{\Omega \cap (S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c/2}^{b_c}} k_c |\nabla u_c|^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega \cap (S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c}^{a_c+b_c}} (v_c^2 + k_c) |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega \setminus (S_u \setminus \mathcal{N})_{a_c+b_c}} ((1 - \eta_c)^2 + k_c) |\nabla u|^2 dx + \int_{(S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c}} \frac{1}{4c} dx \\ &\quad + \int_{(S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c}^{a_c+b_c}} c |\nabla v_c|^2 + \frac{(1 - v_c)^2}{4c} dx + \int_{\tilde{\Omega} \setminus (S_u \setminus \mathcal{N})_{a_c+b_c}} \frac{\eta_c^2}{4c} dx \\ &:= \text{I}_c + \text{II}_c + \text{III}_c + \text{IV}_c + \text{V}_c + \text{VI}_c + \text{VII}_c. \end{aligned}$$

Montrons maintenant, en complétant la construction de u_c et de v_c et en précisant les paramètres a_c, b_c, η_c et κ_c que $\text{IV}_c \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$, que la limite supérieure de

VI_c est inférieure à $\mathcal{H}^{n-1}(S_u \setminus \mathcal{N})$ et que les autres termes tendent vers 0 quand $c \rightarrow 0$.

- Il est évident que $\text{I}_c = 0$;
- Soit $\psi_c \in \mathcal{C}_c^1((S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c})$ tel que $\psi_c = 1$ sur $\Omega_c \cap (S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c/2}$, $|\nabla \psi_c| \leq 2/b_c$. On peut alors prolonger u_c à $\tilde{\Omega}$ entier, en respectant la construction précédente en posant $u_c = (1 - \psi_c)u$. Alors,

$$\begin{aligned} \text{II}_c &\leq 2k_c \int_{\Omega \cap (S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c/2}^{b_c}} (1 - \psi_c)^2 |\nabla u|^2 + u^2 |\nabla \psi_c|^2 dx \\ &\leq 2k_c \int_{\Omega \cap (S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c/2}^{b_c}} |\nabla u|^2 dx + \frac{8k_c}{b_c^2} \int_{\Omega \cap (S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c/2}^{b_c}} |u|^2 dx \\ &\leq 2k_c \int_{\Omega \cap (S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c/2}^{b_c}} |\nabla u|^2 dx + \frac{8k_c}{b_c^2} \|u\|_\infty |(S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c/2}^{b_c}| \\ &\leq 2k_c \int_{\Omega \cap (S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c/2}^{b_c}} |\nabla u|^2 dx + \frac{8k_c}{b_c} \|u\|_\infty \frac{|(S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c}|}{b_c} \end{aligned}$$

Comme $\nabla u \in L^2(\Omega \setminus (S_u \setminus \mathcal{N}))$, le premier terme tend vers 0 quand $c \rightarrow 0$ et d'après l'hypothèse (1.45) sur $S_u \setminus \mathcal{N}$,

Si $k_c \ll b_c$ alors, $\text{II}_c \rightarrow 0$ quand $c \rightarrow 0$.

- De plus, comme $\nabla u \in L^2(\Omega \setminus \mathcal{N})$ et $v_c \in [0, 1]$, alors pour tout $B \subset \Omega$ tel que $|B| \rightarrow 0$, on a $\int_B (v_c^2 + k_c) |\nabla u|^2 dx \rightarrow 0$ quand $c \rightarrow 0$ et donc $\text{III}_c \rightarrow 0$ quand $c \rightarrow 0$.
- En utilisant à nouveau l'hypothèse (1.45), on obtient aisément que si $b_c \ll c$ alors, $\text{V}_c \rightarrow 0$ quand $c \rightarrow 0$.
- Si $\eta_c^2 \ll c$ alors $\text{VII}_c \rightarrow 0$ quand $c \rightarrow 0$.
- Comme $\eta_c \rightarrow 0$ et $k_c \rightarrow 0$, alors $(1 - \eta_c^2 + k_c) \chi_{\Omega \setminus (S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c}^{a_c+b_c}} \rightarrow 0$ presque partout sur Ω et donc $\text{IV}_c \rightarrow 0$.

Pour étudier le comportement du terme restant VI_c , on termine la construction de v_c .

Soit, pour tout $\tau(y) = d(y, S_u \setminus \mathcal{N})$ et complétons la construction de v_c sur $(S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c}^{a_c+b_c}$ sous la forme $v_c(x) = \sigma_c(\tau(x))$. Il est évident de montrer que τ est Lipschitz et que $\text{Lip } \tau \leq 1$. De plus, par [Fed69], 3.2.34 p. 271, $|\nabla \tau| = 1$ presque partout et donc $|\nabla v_c(x)|^2 = |\sigma'_c(\tau(x))|^2$. Enfin, par une conséquence de la formule

de la coaire ([EG92], théorème 2, section 3.4.3 p. 117 ou [Fed69], 3.2.12, p. 249), on obtient :

$$\int_{(S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c}^{a_c+b_c}} |\nabla v_c|^2 dx = \int_{b_c}^{a_c+b_c} \int_{\tau^{-1}(t)} |\sigma'_c(t)|^2 d\mathcal{H}^{n-1}(y) dt \quad (1.46)$$

$$= \int_{b_c}^{a_c+b_c} |\sigma'_c(t)|^2 \mathcal{H}^{n-1}(\tau^{-1}(t)) dt \quad (1.47)$$

de même,

$$\int_{(S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c}^{a_c+b_c}} (1 - v_c)^2 dx = \int_{b_c}^{a_c+b_c} (1 - \sigma_c)^2 \mathcal{H}^{n-1}(\tau^{-1}(t)) dt \quad (1.48)$$

et donc

$$\text{VI}_c = \int_{b_c}^{a_c+b_c} \left\{ c|\sigma'_c|^2 + \frac{(1 - \sigma_c)^2}{4c} \right\} \mathcal{H}^{n-1}(\tau^{-1}(t)) dt. \quad (1.49)$$

Il reste alors à expliciter la construction de σ_c sur $[b_c, a_c + b_c]$, ainsi que l'expression de a_c . Pour assurer la continuité de v_c en $\tau = b_c$ et $\tau = a_c + b_c$, on doit avoir $\sigma_c(b_c) = 0$ et $\sigma_c(a_c + b_c) = 1 - \eta_c$. Cherchons pour cela σ_c et a_c minimisant

$$\int_{b_c}^{a_c+b_c} \left\{ c|\sigma'_c|^2 + \frac{(1 - \sigma_c)^2}{4c} \right\} dx.$$

En faisant le changement de variable $t = b_c + \theta a_c$ et en posant $\lambda = c/a_c$, ceci revient à la minimisation pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \geq 0$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \eta_c$, de

$$I(\lambda, f) = \int_0^1 \lambda f'^2(\theta) + \frac{(1 - f(\theta))^2}{4\lambda} d\theta.$$

Le minimum en λ est atteint pour

$$\lambda^2 = \frac{\int_0^1 \lambda f'^2 d\theta}{4 \int_0^1 \frac{(1-f)^2}{4\lambda} d\theta}. \quad (1.50)$$

Soit maintenant f minimisant $I(\lambda, \cdot)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0, 1])$, on a alors

$$\int_0^1 (\lambda f' \varphi' + \frac{(1 - f)\varphi'}{4\lambda}) d\theta = 0.$$

f vérifie donc l'équation différentielle $4\lambda^2 f'' - f + 1 = 0$ et est donc de la forme

$$f(\theta) = 1 + A \cosh(\theta/2\lambda) + B \sinh(\theta/2\lambda).$$

Comme $f(0) = 0$, on obtient alors $A = -1$ et en substituant l'expression de f dans (1.50),

$$\lambda^2 = \lambda^2 \frac{\int_0^1 (B \cosh(\theta/2\lambda) + A \sinh(\theta/2\lambda))^2}{\int_0^1 (B \sinh(\theta/2\lambda) + A \sinh(\theta/2\lambda))^2}$$

d'où $\int_0^1 (B^2 - 1)(\cosh(\theta/2\lambda)^2 + \sinh(\theta/2\lambda)^2) d\theta = 0$ et donc $B^2 = 1$. Les conditions $f \geq 0$ et $\lambda \geq 0$ imposent alors que $B = 1$ et donc $f(\theta) = 1 - \exp(-\theta)/2\lambda$ et

$$\sigma_c(t) = 1 - \exp\left(\frac{b_c - t}{2c}\right).$$

Enfin, comme $f(1) = 1 - \eta_c$, on a $\eta_c = \exp(-1/2\lambda)$, d'où

$$a_c = -2c \ln(\eta_c).$$

La construction de v_c et le choix des paramètres a_c , b_c et η_c étant achevés, vérifions alors que $\limsup_{c \rightarrow 0} \text{VI}_c \leq \mathcal{H}^1(S_u \setminus \mathcal{N})$.

En reprenant 1.46 et (1.48), on a

$$\begin{aligned} \int_{(S_u \setminus \mathcal{N})_{b_c}^{a_c+b_c}} c|\nabla v_c|^2 + \frac{(1 - v_c)^2}{4c} dx &= \int_{b_c}^{a_c+b_c} |\sigma'_c(t)|^2 \mathcal{H}^{n-1}(\tau^{-1}(t)) dt \\ &\quad + \int_{b_c}^{a_c+b_c} (1 - \sigma_c)^2 \mathcal{H}^{n-1}(\tau^{-1}(t)) dt \\ &= \frac{1}{2c} \int_{b_c}^{b_c - 2c \ln \eta_c} \exp\left(\frac{b_c - t}{c}\right) \mathcal{H}^{n-1}(\tau^{-1}(t)) dt \end{aligned}$$

En posant alors $g(t) = \int_0^t \mathcal{H}^{n-1}(\tau^{-1}(s)) ds$ et en intégrant par parties, on a alors

$$\text{VI}_c = \frac{1}{2c^2} \int_{b_c}^{b_c - 2c \ln \eta_c} \exp\left(\frac{b_c - t}{c}\right) g(t) dt - \frac{g(b_c)}{c} + \frac{\eta_c^2}{2c} g(b_c - 2c \ln \eta_c).$$

De plus, d'après un corollaire de la formule de la coaire ([Fed69], 3.2.11 p. 248), on a

$$\int_{\tau^{-1}([0,t])} dx = \int_{\mathbf{R}} \mathcal{H}^{n-1}(\tau^{-1}([0,t]) \cap \tau^{-1}(y)) dy$$

et donc

$$\begin{aligned} |(S_u \setminus \mathcal{N})_t| &= \int_0^t \mathcal{H}^{n-1}(\tau^{-1}(y)) dy \\ &= g(t). \end{aligned}$$

Alors, d'après l'hypothèse (1.45), et comme $b_c \ll c$, on a

$$\frac{g(b_c)}{c} \rightarrow 0 \text{ quand } c \rightarrow 0.$$

De plus, comme $\eta_c^2 \ll c$ et comme $g(0) = 0$, alors

$$\frac{\eta_c^2}{2c} g(b_c - 2c \ln \eta_c) \rightarrow 0 \text{ quand } c \rightarrow 0.$$

D'après l'hypothèse 1.45, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe t_0 tel que si $t \leq t_0$, alors $g(t) \leq \mathcal{H}^{n-1}(S_u \setminus \mathcal{N}) + \varepsilon$. Alors, pour c assez petit (*i.e.* tel que $b_c - 2c \ln \eta_c \leq t_0$), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c^2} \int_{b_c}^{b_c - 2c \ln \eta_c} \exp\left(\frac{b_c - t}{c}\right) g(t) dt &\leq \\ \frac{1}{c^2} (\mathcal{H}^{n-1}(S_u \setminus \mathcal{N}) + \varepsilon) \int_{b_c}^{b_c - 2c \ln \eta_c} t \exp\left(\frac{b_c - t}{c}\right) dt. \end{aligned}$$

En intégrant alors par parties, il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c^2} \int_{b_c}^{b_c - 2c \ln \eta_c} \exp\left(\frac{b_c - t}{c}\right) g(t) dt &\leq \\ (\mathcal{H}^{n-1}(S_u \setminus \mathcal{N}) + \varepsilon) ((1 - \eta_c)(1 + b_c/c) + 2c\eta_c \ln \eta_c) \end{aligned}$$

et donc, comme $\eta_c \rightarrow 0$ et $b_c/c \rightarrow 0$ quand $c \rightarrow 0$ et par l'arbitrairé de ε , on obtient

$$\limsup_{c \rightarrow 0} \text{IV}_c \leq \mathcal{H}^{n-1}(S_u \setminus \mathcal{N}).$$

Imposons enfin que pour c assez petit, $c^3 \leq \eta_c \leq c^2$. Comme $b_c/c \rightarrow 0$ quand $c \rightarrow 0$, pour c assez petit, on a $b_c \leq c$ et donc $b_c - 2c \ln \eta_c \leq 2c$ et la suite u_c vérifie bien $u_c = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_{2c}$ et donc

$$\limsup_{c \rightarrow 0} F_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \leq F(u, v, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}),$$

ce qui conclut l'estimation de la Γ -limite supérieure sous l'hypothèse (1.45).

1.3.4 Existence et compacité des minimisateurs de E_c

Les deux dernières étapes, du le plan tracé dans la section 1.3.1 sont de montrer l'existence de solutions du problème régularisé puis la compacité de la suite des minimisateurs de E_c .

L'existence de minimisateurs au problème faible est une conséquence directe du théorème de semi-continuité 2.1 p. 243 de [ET76].

Montrons enfin la compacité de la suite des minimisateurs de E_c .

Soit donc (u_c, v_c) , un minimisateur de E_c . Comme dans la remarque 1.2.2, on peut alors supposer que $\|u_c\|_\infty \leq \|U\|_\infty$, alors il existe $u \in L^\infty(\tilde{\Omega})$ telle que $u_c \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^\infty(\tilde{\Omega})$. De plus, on a $v_c \rightarrow 1$ presque partout sur $\tilde{\Omega}$. D'après le théorème d'Egoroff, pour tout ε , il existe alors I_ε tel que $|I_\varepsilon| < \varepsilon$ et $v_c \rightarrow 1$ uniformément sur $\tilde{\Omega} \setminus I_\varepsilon$. Pour c assez petit, on peut alors supposer $v_c > 1/2$ sur $\tilde{\Omega} \setminus I_\varepsilon$ et ∇u_c est donc uniformément borné dans $L^2(\Omega \setminus I_\varepsilon)$. D'après le théorème de Rellich, on a alors $u \in L^2(\tilde{\Omega} \setminus I_\varepsilon)$ et $u_c \rightarrow u$ dans $L^2(\tilde{\Omega} \setminus I_\varepsilon)$, quand $c \rightarrow 0$. Enfin, on a $\int_{I_\varepsilon} |u_c - u|^2 dx \leq 2\|U\|_\infty^2 |I_\varepsilon| \leq C\varepsilon$ et en faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$u_c \rightarrow u \text{ dans } L^2(\tilde{\Omega}),$$

ce qui conclut la preuve du théorème 1.3.2. \square

1.3.5 Approximation du problème faible

La Γ -convergence de F_c vers F , ainsi que l'existence des minimisateurs du problème régularisé et la compacité de leur suite permet d'établir le résultat d'approximation suivant :

Théorème 1.3.4 (Approximation du problème faible).

Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^n tel que

- i) Il existe $M \subset \partial\Omega$, fermé tel que $\mathcal{H}^{n-1}(M) = 0$ et $\partial\Omega$ est Lipschitz et de classe C^1 en dehors de M ;
- ii) Il existe $\mathcal{N} \subset \partial\Omega$, fermé, tel que $\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{N} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{N}}) = 0$.

Soit $\tilde{\Omega}$, un ouvert borné de \mathbf{R}^n , tel que $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$, $U \in W^{1,\infty}(\tilde{\Omega})$ et (u_c^*, v_c^*) , minimisant $F_c(\bullet, \bullet, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega})$.

Alors,

- u_c^* converge dans $L^2(\tilde{\Omega})$ vers une solution u^* du problème faible (1.4);
- $F_c(u_c^*, v_c^*) \rightarrow F(u^*)$.

Preuve. Remarquons tout d'abord que $E_c(u_c^*, v_c^*, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \leq E_c(U, 1, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) < \infty$ et donc que $E_c(u_c^*, v_c^*, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega})$ est uniformément borné. Alors, d'après la troisième assertion du théorème 1.3.2, il existe (u, v) tel que $(u_c^*, v_c^*) \rightarrow (u, v)$ dans $L^2(\tilde{\Omega})$. En utilisant l'estimation de la la Γ -limite inférieure, on a alors

$$F(u, v, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \leq \liminf_{c \rightarrow 0} F_c(u_c^*, v_c^*, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}).$$

Soit (u^*, v^*) , une solution du problème faible.

Alors $\overline{S_{u^*} \setminus \mathcal{N}}$ est $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$ -rectifiable et d'après [Fed69], 3.2.37 p. 273 et 3.2.39 p. 275, $\lim_{c \rightarrow 0} \frac{(\overline{S_{u^*} \setminus \mathcal{N}})_c}{2c} = \mathcal{H}^{n-1}(\overline{S_{u^*} \setminus \mathcal{N}})$. D'après la proposition 1.2.7 et en remarquant que pour tout ρ , $|(\overline{S_{u^*} \setminus \mathcal{N}})|_\rho = |(S_{u^*} \setminus \mathcal{N})_\rho|$, $S_{u^*} \setminus \mathcal{N}$ vérifie donc l'hypothèse 1.45. On peut alors appliquer l'estimation de la Γ -limite supérieure à (u^*, v^*) et il existe donc (u_c, v_c) telle que $(u_c, v_c) \rightarrow (u^*, v^*)$ dans $L^2(\tilde{\Omega})$ et

$$F(u^*, v^*, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \geq \limsup_{c \rightarrow 0} F_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} F(u, v, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) &\leq \liminf_{c \rightarrow 0} F_c(u_c^*, v_c^*, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \leq \\ &\quad \limsup_{c \rightarrow 0} F_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \leq F(u^*, v^*, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \end{aligned}$$

et donc

(u_c, v_c) converge dans $L^2(\tilde{\Omega})$ vers une solution du problème faible

et

$$\lim_{c \rightarrow 0} F_c(u_c^*, v_c^*, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \text{ existe et est égale à } F(u^*, v^*, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}).$$

□

Remarque 1.3.5. L'hypothèse (1.45) n'est donc pas restrictive, dans la mesure où on n'applique l'estimation de la Γ -limite supérieure qu'aux solutions du problème faible. En fait, pour montrer le théorème 1.3.4, il suffit de montrer l'estimation de la Γ -limite supérieure pour les solutions du problème induit par E_c et l'estimation de la Γ -limite supérieure pour les minimisateurs de E .

Bibliographie

- [Amb89] L. AMBROSIO. « Variational Problems in SBV and Image Segmentation ». *Acta Appl. Math.*, 17:1–40, 1989.
- [Amb90] L. AMBROSIO. « Existence Theory for a New Class of Variational Problems ». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 111(1):291–322, 1990.
- [AT92] L. AMBROSIO et V.M. TORTORELLI. « On the approximation of free discontinuity problems ». *Boll. Un. Mat. Ital. (7)*, 6-B:105–123, 1992.
- [CL90] M. CARRIERO et A. LEACI. « Existence theorem for a Dirichlet Problem with free discontinuity set ». *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 15(7):661–677, 1990.
- [DGCL89] E. DE-GIORGI, M. CARRIERO, et A. LEACI. « Existence Theorem for a Minimum Problem with Free Discontinuity Set ». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 108:195–218, 1989.
- [EG92] L.C. EVANS et R.F. GARIEPY. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [ET76] I. EKELAND et R. TEMAM. *Convex analysis and variational problems*. NorthHolland, Amsterdam, 1976.
- [Fed69] H. FEDERER. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, New-York, 1969.
- [FM98] G. FRANCFORST et J.-J. MARIGO. « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem ». *J. Mech. Phys. Solids.*, 46(8):1319–1342, 1998.

Chapitre 2

Le cas vectoriel

2.1 Remarques préliminaires

Comme on l'a rappelé dans l'introduction, l'étude du problème de mécanique de la rupture, tel qu'il est présenté dans [FM98] est pour l'instant hors de portée. En effet, l'espace adapté est celui des fonctions à déformations bornées (*BD*) ou des fonctions spéciales à variations bornées (*SBD*), dont la connaissance est pour l'instant assez lacunaire. En particulier, la structure fine de l'ensemble des sauts d'une fonction de *SBD*, et en particulier sa rectifiabilité, ainsi l'analogie de l'inégalité de Korn ne sont, à l'heure actuelle, pas bien connus (cf. [BCDM95], [ACDM97]). Cependant, les équivalents des théorèmes de semi-continuité et de compacité dans *SBV*, dans des formes plus faibles, peuvent être trouvés dans [BCDM98].

Dans la suite de cette partie on ne s'intéressera donc qu'à un problème vectoriel modèle. Conformément aux remarques de la section 5.1 de [FM98], il est intéressant de se pencher sur le problème de l'interpénétration. En effet, dans le cadre d'un problème mécanique, on veut préserver l'injectivité de la solution et plus précisément, interdire aux lèvres des fissures de s'interpénétrer. La solution proposée est de remplacer l'énergie de surface $\mathcal{H}^{n-1}(S_u)$ du cas scalaire par une énergie finie et constante si les lèvres de la fissure s'écartent et infinie si celles-ci viennent à se superposer.

On définit alors, pour tout $u, v \in \mathbf{R}^n$, tels que $u \neq v$ et tout $\nu \in S^{n-1}$, la fonction

$$\Phi(u, v, \nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } (v - u) \cdot \nu \geq 0; \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour tout Borel B , l'énergie de surface

$$G^s(u, B) = \int_{B \cap S_u} \Phi(u_+(x), u_-(x), \nu_{u(x)}) d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

Dans ce qui suit, on reprend les hypothèses du cas scalaire sur Ω , \mathcal{N} et la condition limite U . Soit $W : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ convexe et coercive. Alors, pour tout Borel B , et toute fonction $u \in SBV(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$ on définit la fonctionnelle faible :

$$G(u, \lambda, B) = \int_B W(\mathrm{D} u) dx + \lambda G^s(u, B). \quad (2.1)$$

En reprenant les hypothèses du cas scalaire sur Ω , \mathcal{N} et la condition limite U , on

définit alors le problème faible :

$$\inf \{G(u, \lambda, \bar{\Omega} \setminus \mathcal{N}) ; u \in SBV(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n), u = U \text{ sur } \mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}\} \quad (2.2)$$

On montre dans un premier temps la semi-continuité de l'énergie de surface G^s , d'où on déduite l'existence de solutions au problème faible induit par G .

Pour construire une approximation au sens de la Γ -convergence de G , il faut alors donner un sens à l'interprétation dans la fonctionnelle régularisée. Ce problème est encore ouvert. Cependant, on montrera comment du théorème de Γ -convergence, démontré dans le cas scalaire, on peut déduire une régularisation d'une variante du problème (2.2), défini par la fonctionnelle :

$$G'(u, \lambda, B) = \int_B |\nabla u|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(S_u \cap B). \quad (2.3)$$

2.2 Existence de solution faibles

La semi-continuité du premier terme de G est une conséquence directe de la convexité de W . Intéressons nous alors à l'énergie de surface $u \rightarrow G^s(u, B)$ et montrons que la fonction Φ vérifie un propriété proche de la biconvexité régulièr, au sens d'Ambrosio, ([Amb90], lemme 3.4 p. 310). Plus précisément, montrons qu'il existe une suite de fonctions $V_h \in \mathcal{C}_c^1(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$ telle que pour tout $a, b \in \mathbf{R}^n$ et $\nu \in S^{n-1}$, si $a \neq b$ alors,

$$\Phi(a, b, \nu) = \sup_{h \in \mathbf{N}} \langle V_h(a - b), \nu \rangle. \quad (2.4)$$

On construit explicitement la suite de fonctions V_h . Soit alors pour tout $k, l \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}^n$

- $\alpha_l(x) \in \mathcal{C}_c^1([0, l]; [0, 1])$ telle que $\alpha_l(l/2) = 1$;
- une suite $(\theta_k)_k$ telle que $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\theta_k\}$ soit dense dans $[-\pi/2, \pi/2]$;
- $\nu_\theta(x)$, telle que $\nu_\theta(0) = 0$ et $\nu_\theta(x)$ soit un vecteur unitaire de \mathbf{R}^n , formant un angle θ avec x .

On définit alors

$$V_{k,l}(x) = \begin{cases} \alpha_l(|x|)\nu_\theta(x) & \text{si } h \geq 0, \\ h\alpha_l(|x|)x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, si $\langle x, \nu \rangle < 0$, on a trivialement

$$\sup_{k,l} \langle V_{k,l}(x), \nu \rangle = +\infty$$

et si $\langle x, \nu \rangle \geq 0$, alors $\sup_{k,l} \langle \nu_\theta(x), \nu \rangle = 1$ et donc

$$\sup_{k,l} \langle V_{k,l}(x), \nu \rangle = 1,$$

ce qui prouve (2.4).

La semi-continuité de G^s se prouve alors par un raisonnement identique à celui tenu dans la démonstration du théorème 3.6 p. 311 de [Amb90]. Alors, si $u_h \in SBV(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$ converge en mesure vers $u \in SBV(\mathbf{R}^n)$, u_h est uniformément bornée dans L^∞ et si ∇u_h est équi-intégrable dans $L^1(\mathbf{R}^n)$, alors pour tout Borel, B on a

$$G^s(u, B) \leq \liminf_h G^s(u_h, B).$$

En posant alors $B = \tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}$, on obtient alors le résultat escompté.

Remarque L'équi-intégrabilité de ∇u_h dans L^1 joue un rôle essentiel dans cette démonstration. Du fait de l'absence d'une estimation du type de l'inégalité de Korn, on n'est donc pas encore en mesure de montrer ce type de résultat pour une formulation faible dans SBD .

L'existence de la solution du problème faible défini au début de cette section, n'est plus qu'une formalité. Comme on a choisi W convexe et coercive, $u \rightarrow \int_{\Omega} W(Du) dx$ est semi-continue inférieurement et par la méthode classique, rappelée dans la section 1.2.2, on obtient l'existence de solutions au problème faible (2.2).

Enfin, on note que l'existence de la solution du problème faible induit par la fonctionnelle \mathcal{G}' est une conséquence directe des théorèmes de compacité et de semi-continuité dans SBV déjà cités.

2.3 Approximation par Γ -convergence

On approche ici la fonctionnelle \mathcal{G}' par une méthode de Γ -convergence, inspirée de celle présentée dans le cas scalaire. On définit donc l'ensemble

$$Y(N, C) = \{(u, v) \in (W^{1,2}(C \setminus N; \mathbf{R}^n) \cap L^\infty(C; \mathbf{R}^n)) \times W^{1,2}(C \setminus N; [0, 1])\},$$

les fonctionnelles

$$G_c(u, v, A, N, C) = \int_{(A \setminus N) \cap C} (v^2 + k_c)|Du|^2 dx + \int_{C \setminus N} c|\nabla v|^2 + \frac{(1-v)^2}{4c} dx;$$

$$\tilde{G}(u, v, A, N, C) = \begin{cases} G(u, A, N, C) & \text{si } u \in SBV(C), \\ & v = 1 \text{ presque partout sur } C, \\ & u = U \text{ sur } C \setminus \overline{A}; \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\widetilde{G}_c(u, v, A, N, C) = \begin{cases} G_c(u, A, N, C) & \text{si } (u, v) \in Y(N, C); \\ & u = U \text{ sur } C \setminus \overline{A}_c \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, par une méthode de sections, inspirée de celle utilisée dans le cas scalaire, on déduit l'équivalent du théorème 1.41 :

Théorème 2.3.1. *Soit $\tilde{\Omega}$, un ouvert borné de \mathbf{R}^n tel que $\overline{\Omega}_c \subset \tilde{\Omega}$, $U \in W^{1,\infty}(\tilde{\Omega})$ et u telle que $u = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$. Alors, si $\lim_{c \rightarrow 0} k_c/c = 0$,*

i) pour toute suite $(u_c, v_c) \in Y(\Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega})$ telle que $u_c \xrightarrow{L^2(\tilde{\Omega})} u$, $u = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$ et $v_c \xrightarrow{L^2(\tilde{\Omega})} v$, on a

$$\liminf_{c \rightarrow 0} \widetilde{G}_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \geq \tilde{G}(u, v, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}); \quad (2.5)$$

ii) si $\lim_{\rho \searrow 0} \frac{|(S_u \setminus \mathcal{N})_\rho|}{2\rho} = \mathcal{H}^{n-1}(S_u \setminus \mathcal{N})$, alors il existe une suite $(u_c, v_c) \in X(\mathcal{N}, \tilde{\Omega})$ telle que $u_c \xrightarrow{L^2(\tilde{\Omega})} u$, $u = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$ et $v_c \xrightarrow{L^2(\tilde{\Omega})} v$ et

$$\limsup_{c \rightarrow 0} \widetilde{G}_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \leq \tilde{G}(u, v, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}); \quad (2.6)$$

iii) Il existe $(u_c, v_c) \in Y(\Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega})$ telle que $u = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$, minimisant G_c et la suite des minimiseurs de \widetilde{G}_c est compacte dans L^2 .

On peut déduire l'estimation de la Γ -limite inférieure de son équivalent dans le cas scalaire, par un méthode de section.

On remarque que pour tout $(u_c, v_c) \in Y(N, C)$, et en notant $u_c^\xi = \langle u_c, \xi \rangle$ et $v_c^\xi = \langle v_c, \xi \rangle$, on a $(u_c^\xi, v_c^\xi) \in X(N, C)$. Soit alors $(u_c, v_c) \in Y(N, C)$ tels que $u_c \xrightarrow{L^2(\tilde{\Omega})} u$, $u = U$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$ et $v_c \xrightarrow{L^2(\tilde{\Omega})} v$ et que $\liminf_{c \rightarrow 0} \widetilde{G}_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) < \infty$. Pour tout $\xi \in S^{n-1}$ et avec le même convention de notations, on a alors $u_c^\xi \xrightarrow{L^2(\tilde{\Omega})} u^\xi$, $u^\xi = U^\xi$ sur $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$ et $v_c^\xi \xrightarrow{L^2(\tilde{\Omega})} v^\xi$. Si $\liminf_{c \rightarrow 0} \widetilde{G}_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) = \infty$, l'estimation est triviale et on suppose donc que la limite inférieure est finie et à

une extraction de sous suite près, que la limite existe et est finie. De plus, on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(S_u \cap (\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N})) \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \sup_{\xi \in S^{n-1}} \left\{ |\nabla u^\xi|^2 d\mathcal{L}^n \llcorner \Omega(x) + 1 d\mathcal{H}^{n-1} \llcorner (S_{u^\xi} \setminus \mathcal{N})(x) \right\} \\
&= \lim_{k \nearrow \infty} \int_{\tilde{\Omega}} \sup_{\xi_i \in S^{n-1}} \left\{ |\nabla u^{\xi_i}|^2 d\mathcal{L}^n \llcorner \Omega(x) + 1 d\mathcal{H}^{n-1} \llcorner (S_{u^{\xi_i}} \setminus \mathcal{N})(x) \right\} \\
&= \lim_{k \nearrow \infty} \sup \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{B_i} |\nabla u^{\xi_i}|^2 d\mathcal{L}^n \llcorner \Omega(x) + 1 d\mathcal{H}^{n-1} \llcorner (S_{u^{\xi_i}} \setminus \mathcal{N})(x); \right. \\
&\quad \left. B_i \text{ Borels disjoints } \subset \tilde{\Omega} \right\} \\
&= \lim_{k \nearrow \infty} \sup \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{O_i} |\nabla u^{\xi_i}|^2 d\mathcal{L}^n \llcorner \Omega(x) + 1 d\mathcal{H}^{n-1} \llcorner (S_{u^{\xi_i}} \setminus \mathcal{N})(x); \right. \\
&\quad \left. O_i \text{ ouverts disjoints } \subset \tilde{\Omega} \right\}
\end{aligned}$$

sur chaque ouvert O_i , on peut appliquer l'estimation de la Γ -limite inférieure dans le cas scalaire d'où on déduit que

$$G(u, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \leq \lim_{k \nearrow \infty} \sup \left\{ \sum_{i=1}^k \liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_c^{\xi_i}, v_c, \Omega, \mathcal{N}, O_i); \right. \\
\left. O_i \text{ ouverts disjoints } \subset \tilde{\Omega} \right\}$$

et que $u^\xi \in SBV(\tilde{\Omega})$, $v^\xi = 1$ presque partout sur $\tilde{\Omega}$. Alors $u \in SBV(\tilde{\Omega})$ et $v = 1$ presque partout sur $\tilde{\Omega}$. Donc, $\tilde{G}(u, v, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) = G(u, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega})$. et

$$\tilde{G}(u, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \leq \sup_{\xi \in S^{n-1}} \liminf_{c \rightarrow 0} F_c(u_c^\xi, v_c, \Omega, \mathcal{N}, O_i)$$

et

$$\tilde{G}(u, \Omega, \mathcal{N}, \tilde{\Omega}) \leq \sup_{\xi \in S^{n-1}} \liminf_{c \rightarrow 0} \tilde{G}_c(u_c, v_c, \Omega, \mathcal{N}, O_i),$$

ce qui prouve l'estimation de Γ -limite inférieure.

L'estimation de Γ -limite supérieure et la compacité de la suite des minimiseurs de G_c utilisent rigoureusement la même méthode que dans le cas scalaire.

Bibliographie

- [ACDM97] L. AMBROSIO, A. COSCIA, et G. DAL-MASO. « Fine Properties of functions with bounded deformation ». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 3(139):201–238, 1997.
- [Amb90] L. AMBROSIO. « Existence Theory for a New Class of Variational Problems ». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 111(1):291–322, 1990.
- [BCDM95] G. BELLETTINI, A. COSCIA, et G. DAL-MASO. « Special functions of bounded deformations ». Rapport Technique 76/95/M, SISSA, Trieste, June 1995.
- [BCDM98] G. BELLETTINI, A. COSCIA, et G. DAL-MASO. « Compactness and lower semicontinuity properties in $SBD(\Omega)$ ». *Mat. Z.*, 2(228), 1998.
- [FM98] G. FRANCFORST et J.-J. MARIGO. « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem ». *J. Mech. Phys. Solids.*, 46(8):1319–1342, 1998.

Chapitre 3

**Mise en œuvre numérique du
problème de Mumford-Shah
par un méthode d’éléments
finis**

Image Segmentation With a Finite Element Method

B. Bourdin

LPMTM , Institut Galilé

Université Paris Nord

Av. J.-B. Clément

93430 Villetaneuse

France

Introduction

Our aim is to minimize the functional proposed by D. Mumford and J. Shah [MS89] in the problem of image segmentation, namely

$$\mathcal{E}(u, \Gamma) = \beta \int_{\Omega \setminus \Gamma} (u - g)^2 dx + \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \alpha \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma \cap \Omega)$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, an open bounded set, is the image domain, g is the observed grey level of the image ($g \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$) and u is a smooth approximation of g ($u \in C^1(\Omega \setminus \Gamma)$), Γ denotes the set of possible edges (a closed subset of Ω) and \mathcal{H}^{n-1} denotes the $n - 1$ -dimensional Hausdorff measure and α and β are positive fixed parameters.

In a formal way, \mathcal{E} can be represented by an energy, associated to a function u , which must be smooth and close to the original image, except on a curve set Γ , called the edge set of the image.

This problem has been studied by several authors. First, E. De Giorgi, M. Carriero and A. Leaci [DGCL89] proposed an equivalent functional, E , with u in $SBV(\Omega)$ and Γ represented by S_u , the discontinuity set of u .

Then, L. Ambrosio and V.M. Tortorelli devised an approximation E_c of E by means of an elliptic functional that uses an additional variable v , representing (in some sense) $\mathcal{H}^{n-1}(S_u)$ and a small parameter, c , the relaxation parameter, via Γ -convergence. In view of the properties of Γ -convergence, the minimization of E reduces to that of E_c , for small c . See [AT90], [AT92].

This work led to at least two different numerical approaches: G. Belletini and A. Coscia [BC94] proposed a discrete approximation $E_{c,h}^B$ of E_c by piecewise linear functions, which lends itself to a finite element analysis of the problem, while T.J. Richardson and S.K. Mitter [RM97] implemented a gradient method.

In this study, we start from the functional E_c , propose a discrete approximation $E_{c,h}$ different from that proposed by G. Belletini and A. Coscia and implement a finite element method for the minimization of $E_{c,h}$.

The content of this paper is as follows:

Section 1 is entirely devoted to notation.

In Section 2, we recall various results borrowed from the already quoted references.

In Section 3, we present our discrete functional $E_{c,h}$ and prove its Γ -convergence to E and the convergence of the minimum values and of the minimizers.

In Section 4, we detail the numerical implementation of the computation.

In Section 5, we present and discuss a few numerical results computed from both real and artificial images.

3.1 Notation

In \mathbb{R}^n , $|\bullet|$ denotes the usual euclidean norm, dx or \mathcal{L}^n , the Lebesgue measure, and \mathcal{H}^k , the k -dimensional Hausdorff measure.

Set $\mathcal{E}(u, \Gamma) = \beta \int_{\Omega \setminus \Gamma} (u - g)^2 dx + \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \alpha \mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \Gamma)$ (the Mumford-Shah functional).

Let $BV(\Omega)$ be the space of functions $u \in L^1(\Omega)$ such that the distributional derivative of u can be represented by a regular Borel measure with finite total variation $Du : B(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$, where $B(\Omega)$ denotes the set of all Borel subsets of Ω .

Let S_u be the complement of the Lebesgue set of u , i.e. ,

$$S_u = \left\{ x \in \Omega : \exists z \in \mathbb{R} \text{ such that } \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{-n} \int_{B_\rho(x)} |u(x) - z| dx = 0 \right\}$$

Denote by $SBV(\Omega)$, the space of functions u in $BV(\Omega)$ such that Du is absolutely continuous with respect to $\mathcal{L}^n + \mathcal{H}^{n-1} \llcorner S_u$.

For further properties of BV and SBV , see [EG92] and [AT90].

Denote by \mathcal{R} , the class of all piecewise C^2 submanifolds of \mathbb{R}^n of dimension $n-1$.

Denote by $\{S_h\}_h$, a regular family of partition of Ω into simplices.

Let $\mathbb{P}_n(\Omega)$ be the space of polynomials on Ω of total degree less or equal than n .

Denote by $V_h(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, the linear finite element space over S_h :

$v_h \in V_h$ if and only if $v_h \in \mathbb{P}^1(T), \forall T \in S_h$ and $v_h \in \mathcal{C}(\Omega)$.

Let $V_h(\Omega, [0, 1]) = \{v \in V_h(\Omega); \forall x \in \Omega, v(x) \in [0, 1]\}$.

Let π_h be the Lagrange projection operator over V_h , i.e. given $v \in \mathcal{C}(\Omega)$, $\pi_h(v)$ is such that $\pi_h(v) \in V_h(\Omega)$ and for all nodes $s \in S_h$, $(\pi_h(v))(s) = v(s)$.

3.2 Various results

3.2.1 Extension to SBV and equivalent problem

Set:

$$E(u) = \beta \int_{\Omega} (u - g)^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \alpha \mathcal{H}^{n-1}(S_u \cap \Omega) \quad (3.1)$$

It is proved in [DGCL89] that $\min \{E(u), u \in SBV(\Omega)\}$ and $\min \{\mathcal{E}(u, \Gamma); \Gamma \text{ closed subset of } \Omega \text{ and } u \in C^1(\Omega \setminus \Gamma)\}$ are equivalent problems.

Firstly, $\inf \{E(u), u \in SBV(\Omega)\}$ is smaller than

$\inf \{\mathcal{E}(u, \Gamma); \Gamma \text{ closed subset of } \Omega \text{ and } u \in C^1(\Omega \setminus \Gamma)\}$, which is immediate because, if $u \in C^1(\Omega \setminus \Gamma) \cap L^\infty(\Omega)$, $\int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx < \infty$ and $\mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \Gamma) < \infty$, then $u \in SBV(\Omega)$ (Lemma 2.3 of [DGCL89]). Then the existence of $\min \{E(u), u \in SBV(\Omega)\}$ is established in Lemma 5.1 of [DGCL89]. Finally, if u is a minimizer of E , on $SBV(\Omega)$, then ([DGCL89], Lemma 5.2) $u \in C^1(\Omega \setminus \bar{S}_u)$ and $\mathcal{H}^{n-1}((\bar{S}_u \cap \Omega) \setminus S_u) = 0$, and the result is achieved.

The next step is to focus on the term $\mathcal{H}^{n-1}(S_u \cap \Omega)$. To this effect, E is approximated in the sense of Γ -convergence by means of an elliptic functional.

Many such functionals have been proposed [AT90],[AT92],[BC94],[RM97].

3.2.2 Γ -convergence results

The main idea is to use an additional functional variable $v : \Omega \rightarrow [0, 1]$, that will "represent" the jump set S_u and to define the relaxed functional $E_c(u, v)$, with u and v in a convenient space.

One sets

$$F_c(u, v) = \begin{cases} E_c(u, v) & \text{if } (u, v) \in \text{Dom}(E_c), \\ \infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

$$F(u, v) = \begin{cases} E(u) & \text{if } u \in \text{Dom}(E) \text{ and } v = 1 \text{ a.e.,} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

If F_c Γ -converges to F when $c \rightarrow 0$, with respect to the $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega; [0, 1])$ strong topology, and if the sequence of minimizers (u_c, v_c) for E_c is compact in $\text{Dom}(E)$, then a subsequence of (u_c, v_c) (still indexed by c) is such that $u_c \rightarrow u$ in $L^2(\Omega)$ and $v_c \rightarrow v$ in $L^2(\Omega)$ and (u, v) minimizes F , i.e., u minimizes E .

Remark:

It is not necessary to establish the Γ -convergence of F_c to F so as to construct approximate minimizers. Indeed it suffices to prove that if (u, v) is a minimizer for F , there exists (u_c, v_c) in $\text{Dom}(E_c)$, such that $(u_c, v_c) \rightarrow (u, v)$ in $L^2(\Omega)$ and $F(u, v) \geq \limsup F_c(u_c, v_c)$, that the lower inequality, $\liminf F_c(\bar{u}_c, \bar{v}_c) \geq F(\bar{u}, \bar{v})$ if $(\bar{u}_c, \bar{v}_c) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$ in $L^2(\Omega)$, holds and that sequences of approximate minimizers are compact in $L^2(\Omega)$.

The first approximating functional of this kind was proposed in [AT90]. It is

$$E_c(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \beta(u - g)^2 + (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) (1 - v^2)^{\frac{2}{c}} + \frac{\alpha^2}{4c^2} v^2 \right\} dx \quad (3.2)$$

with $W^{1,2}(\Omega) \times \{v \in W^{1,2}(\Omega); 0 \leq v \leq 1 \text{ a. e.}\} \subset \text{Dom}(E_c) \subset \mathcal{B}(\Omega) \times \{v \in \mathcal{B}(\Omega); 0 \leq v \leq 1 \text{ a. e.}\}$, where $\mathcal{B}(\Omega)$ is the set of Borelian mappings on Ω .

The Γ -convergence takes place in $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega; [0, 1])$ strong topology, and the total variation of $(1 - v)^{1+1/c}$ weakly converges in the

sense of measures to $2\mathcal{H}^{n-1}\llcorner S_u(B)$, as $c \rightarrow 0$, i.e., μ_c defined as $\mu_c(B) = (1 + \frac{1}{c}) \int_B v_c(1 - v_c)^{\frac{1}{c}} |\nabla v_c| dx$ vaguely converges to $\mathcal{H}^{n-1}\llcorner S_u$, as $c \rightarrow 0$.

Note that because of the term $(1 - v^2)^{\frac{2}{c}}$, this functional cannot be easily discretized, as $c \rightarrow 0$

Then, in [AT92] the Γ -convergence, with respect to the $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega; [0, 1])$ strong topology, of the following functional is addressed:

$$E_c(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \beta(u - g)^2 + (v^2 + k_c) |\nabla u|^2 + \alpha \left(c |\nabla v|^2 + \frac{(1-v)^2}{4c} \right) \right\} dx,$$

with $k_c \ll c$ and $\alpha > 0$. (3.3)

In (3.3), $\text{Dom}(E_c) = \{L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)\} \times \{L^\infty(\Omega; [0, 1]) \cap \mathcal{C}^1(\Omega; [0, 1])\}$ and v plays the role that $1 - v$ played in (3.2). This expression gave rise to two different numerical methodologies.

In [BC94] the Γ -convergence of a piecewise linear functional close to (3.3) is investigated.

It is of the form

$$E_{c,h}^B(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \beta \pi_h((u - g_c)^2) + (v + k_c) |\nabla u|^2 \right\} dx + \frac{2\alpha}{\pi} M_{c,h}(v) (3.4)$$

with $M_{c,h}(v) = \int_{\Omega} \left(c |\nabla v|^2 + \frac{1}{4c} \pi_h(1 - v^2) \right) dx$,

where $(u, v) \in V_h(\Omega) \times V_h(\Omega; [0, 1])$, $g_c \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ approximates g , in a manner such that $g_c \rightarrow g$ in $L^2(\Omega)$, $\|g_c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$ and $\|\nabla g_c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C}{c}$, which is feasible by convolution with an approximation of the identity (cf. e.g. [Bre89], Section IV.4). If $h = o(k_c)$ and $k_c = o(c)$ then $F_{c,h}$ (defined from $E_{c,h}$ as F_c was defined from E_c) Γ -converges to F , with respect to the $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega; [0, 1])$ strong topology, as $c \rightarrow 0$.

The functional $E_{c,h}$ is a good candidate for a finite element analysis of the problem. A numerical implementation of (3.4) has been recently proposed by [FVP95] for synthetics images.

Yet another change from (3.3) is the formulation proposed in [RM97], namely,

$$E_c(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \beta(u - g)^2 + \Phi(v) |\nabla u|^2 + \alpha \left(c\Psi(v) |\nabla v|^2 + \frac{(1-v)^2}{4c} \right) \right\} dx \quad (3.5)$$

In (3.5), Φ and Ψ are \mathcal{C}^1 functions with "good" properties, in which case, F_c is shown in [AT92] to Γ -converge to F , with respect to the $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega; [0, 1])$ strong topology.

Using this expression of E_c , a gradient descent algorithm is implemented in [RM97]: Given (u^0, v^0) and c_{u_n}, c_{v_n} , 2 scalars, compute:

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n - c_{u_n} \partial_u E_c \\ v^{n+1} = v^n - c_{v_n} \partial_v E_c \end{cases} \quad (3.6)$$

and update the scalars c_{u_n}, c_{v_n} , using u_n, v_n, Φ and Ψ .

The authors also propose dynamic scaling, setting $c = c(n)$, $\beta = \beta(n)$, then using $c(n)$ as a stopping criterion, because the edge width is correlated with the value $c(n)$.

In the present paper, we propose to build a piecewise linear discretization of (3.3) proposed by L. Ambrosio and V.M. Tortorelli. We revisit the Γ -convergence of the discretized problem with respect to the $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega; [0, 1])$ strong topology, the compactness of the sequence of the minimizers, then implement a finite element method so as to solve the discretized problem.

3.3 The Finite Element Method for Image Segmentation

3.3.1 Γ -convergence and piecewise linear approximation

Let us consider the functional E_c , proposed in [AT92], namely,

$$E_c(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \beta(u - g)^2 + (v^2 + k_c) |\nabla u|^2 + \frac{2\alpha}{\pi} \left(c |\nabla v|^2 + \frac{(1-v)^2}{4c} \right) \right\} dx. \quad (3.7)$$

Set

$$F_c(u, v) = \begin{cases} E_c(u, v) & \text{if } (u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega; [0, 1]), \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}, \quad (3.8)$$

and let $E_{c,h}$, be the following

$$E_{c,h}(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \beta(u - g_{c,h})^2 + (v^2 + k_c) |\nabla u|^2 \right\} dx + \frac{2\alpha}{\pi} M_{c,h}(v) \quad (3.9)$$

where

$$M_{c,h}(v) = \int_{\Omega} \left\{ c |\nabla v|^2 + \frac{(1-v)^2}{4c} \right\} dx \quad (3.10)$$

and $g_{c,h} = \pi_h(g_c)$, with g_c as in (3.4),

and

$$F_{c,h}(u, v) = \begin{cases} E_{c,h}(u, v) & \text{if } (u, v) \in V_h(\Omega) \times V_h(\Omega; [0, 1]), \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}. \quad (3.11)$$

Then, the following approximation theorem, which is a mere adaptation of theorem 1.1 in [BC94] holds:

Theorem

Let $h \ll k_c \ll c$; then the minimum of $(E_{c,h})$ converges to the minimum of F as $c \rightarrow 0$.

Furthermore, if $(u_{c,h}, v_{c,h})$ is a minimizer for $F_{c,h}$ then, possibly passing to a subsequence, $(u_{c,h}, v_{c,h})$ converges strongly in $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega; [0, 1])$ to a minimizer of F .

The proof of this theorem divides into three steps:

First step – the lower inequality.

Let $h = o(c)$, $(u, v) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega; [0, 1])$ and for every $c > 0$ let $(u_{c,h}, v_{c,h}) \in V_h(\Omega) \times V_h(\Omega; [0, 1])$ be such that the sequence $\{(u_{c,h}, v_{c,h})\}_c$ converges to (u, v) in $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega; [0, 1])$.

Then

$$F(u, v) \leq \liminf_{c \rightarrow 0} F_{c,h}(u_{c,h}, v_{c,h}). \quad (3.12)$$

Second step – the upper inequality.

Let $h = o(k_c)$, $(u, v) \in SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega; [0, 1])$. Then for every $c > 0$, there exists $(u_{c,h}, v_{c,h}) \in V_h(\Omega) \times V_h(\Omega; [0, 1])$ such that the sequence $\{(u_{c,h}, v_{c,h})\}_c$ converges to (u, v) in $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega; [0, 1])$ and

$$F(u, v) \geq \limsup_{c \rightarrow 0} F_{c,h}(u_{c,h}, v_{c,h}) \quad (3.13)$$

Third step – compactness of the minimizers for $F_{c,h}$ and convergence of the minimum values.

The following properties pertaining to $E_{c,h}^B$, were proved in [BC94], (see Theorem 6.1 and 6.2) and will apply to $E_{c,h}$, at the expense of minor changes in the proofs.

Let $h = o(k_c)$, and $(u_{c,h}, v_{c,h}) \in V_h(\Omega) \times V_h(\Omega; [0, 1])$ be a minimum point of $F_{c,h}$, then, a subsequence (still indexed by c) $\{(u_{c,h}, v_{c,h})\}_c$ converges in $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega; [0, 1])$ (as $c \rightarrow 0$) to $(u, 1)$ where $u \in SBV(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$

Further, assume that there exists at least a minimizer \bar{u} of F . Then the minimum values of $F_{c,h}$ converge to the minimum value of F as $c \rightarrow 0$. Moreover, any family $\{(u_{c,h}, v_{c,h})\}_c$ of absolute minimizers of $\{F_{c,h}\}_c$ is relatively compact in $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega; [0, 1])$, and each of its limit points minimizes F .

Proof of the first step

Assume that $\liminf F_{c,h}(u_{c,h}, v_{c,h}) < \infty$, otherwise the result is trivial. Then, $\liminf_{c \rightarrow 0} E_{c,h}(u_{c,h}, v_{c,h}) = \liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_{c,h}, v_{c,h})$.

Indeed,

$$E_{c,h}(u_{c,h}, v_{c,h}) = E_c(u_{c,h}, v_{c,h}) + \beta \int_{\Omega} \{(u_{c,h} - g_{c,h})^2 - (u_{c,h} - g)^2\} dx$$

But

$$\int_{\Omega} \{(u_{c,h} - g_{c,h})^2 - (u_{c,h} - g)^2\} dx \leq \int_{\Omega} g_{c,h}^2 - g^2 dx + 2 \int_{\Omega} u_{c,h} \cdot (g - g_{c,h}) dx$$

Since $g_{c,h} = \pi_h(g_c)$, $g_c \in C_0^\infty(\Omega)$ and $h = o(c)$, $g_{c,h} \rightarrow g$ in L^2 when $c \rightarrow 0$.

Hölder's inequality implies

$$\int_{\Omega} |u_{c,h} \cdot (g - g_{c,h})| dx \leq \left(\int_{\Omega} |u_{c,h}|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |g - g_{c,h}|^2 dx \right)^{1/2}$$

and by virtue of the convergence of $u_{c,h}$ to u and $g_{c,h}$ to g in L^2 when $c \rightarrow 0$,

$$\int_{\Omega} |u_{c,h} \cdot (g - g_{c,h})| dx \rightarrow 0$$

Thus $\liminf_{c \rightarrow 0} E_{c,h}(u_{c,h}, v_{c,h}) = \liminf_{c \rightarrow 0} E_c(u_{c,h}, v_{c,h})$ and since $V_h(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, one can use the Γ -convergence of F_c to F and conclude that $F(u, v) \leq \liminf_{c \rightarrow 0} F_{c,h}(u_{c,h}, v_{c,h})$ and that the lower inequality holds.

Proof of the second step

In a first time, we will prove the upper inequality with the additional hypothesis, $S_u \in \mathcal{R}$, which has been supposed in [BC94]. Then, we will explain how to prevent from the use of it.

Let $h = o(k_c)$, $(u, v) \in L^\infty(\Omega) \cap SBV(\Omega) \times L^\infty(\Omega; [0, 1])$. If $F(u, v)$ is not finite, the result is trivial, then we can suppose that $v \equiv 1$ and $u \in SBV(\Omega) \cap H^1(\Omega \setminus \bar{S}_u)$.

Set $(u_{c,h}, v_{c,h}) \in V_h(\Omega) \times V_h(\Omega; [0, 1])$ such that $(u_{c,h}, v_{c,h}) \rightarrow (u, v)$ in L^2 when $c \rightarrow 0$, $E_{c,h}(u_{c,h}, v_{c,h}) \leq C$ for all c and $u_{c,h} \in W^{2,\infty}(S); \forall S \in S_h$.

One has:

$$\begin{aligned} E_{c,h}^B(u_{c,h}, v_{c,h}) - E_{c,h}(u_{c,h}, v_{c,h}) &= \beta \int_{\Omega} \pi_h((u_{c,h} - g_c)^2) - (u_{c,h} - g_{c,h})^2 dx \\ &\quad + \sum_{S \in S_h} \int_S (v_{c,h} + k_c) |\nabla u_{c,h}|^2 - (v_{c,h}^2 + k_c) |\nabla u_{c,h}|^2 dx \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\pi c} \int_{\Omega} \pi_h(1 - v_{c,h}^2) - (1 - v_{c,h})^2 dx \end{aligned}$$

We now prove that $I_{c,h} = \beta \int_{\Omega} |\pi_h(u_{c,h}^2) - (u_{c,h})^2| dx \rightarrow 0$ when $c \rightarrow 0$.
Indeed, $I_{c,h} \leq \sum_{S \in S_h} |S| \|\pi_h(u_{c,h}^2) - u_{c,h}^2\|_{L^\infty(\Omega)}$,
and, using [Cia87], Theorem 3.1.5, $I_{c,h} \leq C' \cdot h^2 \cdot \sum_{S \in S_h} |S| \|D^2(u_{c,h}^2)\|_{L^\infty(S)}$.

Since $u_{c,h}$ is piecewise linear, $\|D^2(u_{c,h}^2)\|_{L^\infty(S)} = 2 \|\nabla u_{c,h} \otimes \nabla u_{c,h}\|_{L^\infty(S)} = 2 |\nabla u_{c,h}|^2$,
for all $S \in S_h$

and since $E_{c,h}(u_{c,h}, v_{c,h}) \leq C$ for all c , one has $\sum_{S \in S_h} \int_S |\nabla u_{c,h}|^2 dx \leq \frac{C}{k_c}$ thus
 $I_{c,h} \rightarrow 0$ as $c \rightarrow 0$.

The same kind of argument is used to prove that
 $\beta \int_{\Omega} |\pi_h(g_c^2) - (g_c)^2| dx \rightarrow 0$ and $\beta \int_{\Omega} |\pi_h(u_{c,h} \cdot g_c) - (u_{c,h} \cdot g_c)^2| dx \rightarrow 0$ when
 $c \rightarrow 0$.

Since $v_{c,h} \in V_h(\Omega; [0, 1])$, $v_{c,h}^2 \leq v_{c,h}$, and
 $\int_{\Omega} (v_{c,h} + k_c) |\nabla u_{c,h}|^2 - (v_{c,h}^2 + k_c) |\nabla u_{c,h}|^2 dx \geq 0$. Further, since π_h is a linear projection, $\pi_h(v_{c,h}^2) \leq \pi_h(v_{c,h}) = v_{c,h}$, $\pi_h(1 - v_{c,h}^2) \geq 1 - v_{c,h} \geq (1 - v_{c,h})^2$ and
 $\sum_{S \in S_h} \int_S \pi_h(1 - v_{c,h}^2) - (1 - v_{c,h})^2 dx \geq 0$.
Thus $\limsup_{c \rightarrow 0} E_{c,h}^B(u_{c,h}, v_{c,h}) \geq \limsup_{c \rightarrow 0} E_{c,h}(u_{c,h}, v_{c,h})$

We now consider the sequence $(u_{c,h}, v_{c,h})$ built in [BC94] for the upper inequality, and suppose that $S_u \in \mathcal{R}$; it is such that $(u_{c,h}, v_{c,h}) \rightarrow (u, v)$ in L^2 , $\limsup_{c \rightarrow 0} E_{c,h}^B(u_{c,h}, v_{c,h}) \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \beta |u - g|^2 dx + \alpha \mathcal{H}^{n-1}(S_u)$ and verifies the above mentioned hypothesis. Thus,

$$\limsup_{c \rightarrow 0} E_{c,h}(u_{c,h}, v_{c,h}) \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \beta |u - g|^2 dx + \alpha \mathcal{H}^{n-1}(S_u) \quad (3.14)$$

We now explain how to prevent from the use of the hypothesis $S_u \in \mathcal{R}$:

In [MS89] D. Mumford and J. Shah conjectured that the minimizing set Γ of \mathcal{E} should be a finite union of C^1 hypersurfaces. Some recent works partially proved this conjecture:

In [Bon96], A. Bonnet proved it in the 2-dimensional case with the following additional hypothesis: Γ has a finite number of connected components.

F. Dibos and E. Séré proved in [DS], Theorem 1.7, that if (u, Γ) is a minimum point of \mathcal{E} then $\forall \epsilon > 0, \exists (u_\epsilon, \Gamma_\epsilon)$ where Γ_ϵ is a finite union of smooth hypersurfaces

(included in hyperplanes, spheres or cylinders), such that $u_\epsilon \in \mathcal{C}^1(\Omega \setminus \Gamma_\epsilon)$, $\|u_\epsilon - u\|_{L^1} \leq \epsilon$ and $\mathcal{E}(u_\epsilon, \Gamma_\epsilon) \leq \mathcal{E}(u, \Gamma) + \epsilon$. This result was generalized by G. Dal Maso in [Cha95], Lemma G.2 to all functions of $SBV(\Omega)$. Then, each function of $SBV(\Omega)$ can be approximated by functions u_ϵ such that $u_\epsilon \rightarrow u$ in L^1 , $E(u_\epsilon) \leq E(u) + \epsilon$ and $S_{u_\epsilon} \in \mathcal{R}$. We apply the upper inequality to u_ϵ and by a diagonal sequence argument, conclude:

If $h = o(k_c)$ and $(u, v) \in L^\infty(\Omega) \cap SBV(\Omega) \times L^\infty(\Omega; [0, 1])$, then there exist a sequence $(u_{c,h}, v_{c,h}) \in V_h(\Omega) \times V_h(\Omega; [0, 1])$ such that

$$F(u, v) \geq \limsup_{c \rightarrow 0} F_{c,h}(u_{c,h}, v_{c,h}).$$

The proof of the third step follows step by step that of Theorem 6.1 and 6.2 in [BC94].

3.4 Numerical implementation

3.4.1 The constraint on v

A rapid investigation of the constraint $v \in [0, 1]$, permits to simplify the numerical minimization of $E_{c,h}$.

Suppose that $(u, v) \in V_h(\Omega)^2$ are minimizers for $E_{c,h}$.

Set $\tilde{v} = \pi_h(\min(1, v))$, which is allowed since $\min(1, v) \in \mathcal{C}(\Omega)$.

Then $\int_\Omega |\nabla \tilde{v}|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla v|^2 dx$, $\int_\Omega (1 - \tilde{v})^2 dx \leq \int_\Omega (1 - v)^2 dx$ and $\int_\Omega (\tilde{v}^2 + k_c) |\nabla u| dx \leq \int_\Omega (v^2 + k_c) |\nabla u| dx$.

If $|\{x \in \Omega; v(x) > 1\}| > 0$, then the two last inequalities are strict and $E_{c,h}(u, \tilde{v}) < E_{c,h}(u, v)$, which is in contradiction with the hypothesis that (u, v) are minimizers for $E_{c,h}$ on $V_h(\Omega)^2$. Thus, the constraint $v \in V_h(\Omega; (-\infty, 1])$ is satisfied for the minimizers of $E_{c,h}$ over $V_h(\Omega)^2$.

A similar argument would show that $v(x) \geq 0$ a.e. in Ω , and we conclude that all minimizers (u, v) for $E_{c,h}$ over $V_h(\Omega)^2$ are such that $v(x) \in V_h(\Omega; [0, 1])$.

Consequently, our choice of discrete functional renders the constraint on v internal, which is not the case of the formulation proposed in [BC94]: if (u, v) in a

(constrained) minimizer for $E_{c,h}^B$ then $v(x) \geq 0$ a.e. and $E_{c,h}^B(u, -v) < E_{c,h}^B(u, v)$ as soon as $|\{x \in \Omega; v(x) > 0\}| > 0$, so that the unconstrained minimization will never yield a non negative minimizer v (if such a minimizer exists).

For a numerical standpoint, the absence of constraint on v greatly simplifies the algorithm.

3.4.2 Minimization strategy

Consider the problem,

$$(u, v) = \min_{(u,v)} \{E_{c,h}(u, v) | (u, v) \in V_h(\Omega)^2\} \quad (3.15)$$

Because of the cross term $v^2 |\nabla u|^2$, a direct finite element method cannot be used. Since $E_{c,h}$ is strictly convex in the directions (\bullet, v) and (u, \bullet) , we propose an alternate minimization scheme; specifically, our algorithm is as follows:

Given (u^0, v^0) , compute $\begin{cases} u^n = \min_u E_{c,h}(u, v^{n-1}) \\ v^n = \min_v E_{c,h}(u^n, v) \end{cases}$
and set $E_c^n = E_c(u^n, v^n)$.

Since the successive minimization problems are strictly convex, the existence and uniqueness of u_n and v_n is ensured.

The successive minimization problems being strictly convex and quadratic, a straightforward finite element method can be implemented.

Remark: We have not managed, as of yet, to prove the convergence of the alternate minimization algorithm. Remark however that the sequence E_c^n is decreasing .

In figure 3.1, we present the evolution of the relative error for the different parts of $E_{c,h}$ for a computation on a real image of 256 x 256 pixels with the following parameters: $\alpha = 2.10^{-2}$, $\beta = 5.10^{-1}$, $c = 10^{-1}$.

The data plotted is $\frac{|E_i(t) - E_i(\infty)|}{E_i(\infty)}$ where $E_i(t)$ is the part E_i of $E_{c,h}$, according to the following notations, at the step t of the alternates directions scheme.

The labels are: $E_1 = \int_{\Omega} (v^2 + k_c) |\nabla u|^2 dx$, $E_2 = \alpha \int_{\Omega} \left(c |\nabla v|^2 + \frac{(1-v)^2}{4c} \right) dx$, and $E_3 = \beta \int_{\Omega} |u - g_{c,h}|^2 dx$

3.4.3 Parameter choice

We now describe the choice of the discretization parameter h , according to the hypothesis $h = o(c)$, as well as that of the pixel coordinates.

Let Ω , be the original domain, and set $\hat{x} = (1/k).x \in \hat{\Omega} = k.\Omega$, for all $x \in \Omega$, then one has

$$\begin{aligned} E_c(u(x), v(x)) &= \int_{\hat{\Omega}} (\hat{v}^2 + k_c) |\nabla \hat{u}|^2 d\hat{x} + \alpha \int_{\hat{\Omega}} \left(c |\hat{\nabla} v|^2 + \frac{(1-\hat{v})^2}{4.k^2.c} \right) d\hat{x} \\ &\quad + \frac{\beta}{k^2} \int_{\hat{\Omega}} (\hat{u} - \hat{g})^2 d\hat{x} \\ &= \int_{\hat{\Omega}} (\hat{v}^2 + k_c) |\nabla \hat{u}|^2 d\hat{x} + \frac{\alpha}{k} \int_{\hat{\Omega}} \left(c.k |\hat{\nabla} v|^2 + \frac{(1-\hat{v})^2}{4.k.c} \right) d\hat{x} \\ &\quad + \frac{\beta}{k^2} \int_{\hat{\Omega}} (\hat{u} - \hat{g})^2 d\hat{x} \end{aligned}$$

The magnitude ratio between the different terms in E_c will only be preserved for all homothetics of ratio k of the original domain if

$$\begin{cases} c(k) = c.k \\ \alpha(k) = \frac{\alpha}{k} \\ \beta(k) = \frac{\beta}{k^2} \end{cases}$$

Thus the domain size k influences both the choice of allowable discretization parameter h and of the constants α and β . In other words, different computation cannot be compared until α, β and k are specified.

3.4.4 General choices

No computation can be performed without prior mesh generation. A simplifying idea would be to use regular meshes (grids), the nodes of which coincide with the pixels. The finite element method could then be equivalent to a finite difference method, provided all elements are identical and identically oriented. This lowers the computation time, since approximate integration or affine transformation are then superfluous. In a finite element method, however, the computation time is mostly spent solving the linear system, while the time spent generating more complicated finite element matrices is negligible; this motivates our decision to generate arbitrary meshes that do not need to coincide with the pixels.

With arbitrary mesh, the implementation of further enhancements like scale focussing, mesh adaptation, and the processing of non rectangular images becomes possible. For the same reason, it would be possible to use higher order

elements, if one could prove the convergence of the discrete functional for a better discretization.

In the presented computations, however, the computational mesh has been taken to coincide with the pixels (but the possible simplification resulting from the use of such a mesh have not been implemented; in other words, we are still using a general finite element algorithm for the solving of the minimization problem). In any case, h , defined as the radius of the inscribed circle in an element is thus of the order of 1, while k (the size of the image) is proportional to the square root of the number of pixels.

Each alternate minimization step involves the resolution of a linear system, the dimension of which is the number of nodes.

Since finite element method, produces linear system whose matrices are symmetrical with a large proportion of zeros, a skyline storage is implemented: The only terms to be stored as a vector are the elements of each line between the first non logically zero term and the diagonal term. A second vector, the profile, keeps the position in the compressed vector of the diagonal terms of the starting matrix.

Computations are then performed only inside the skyline, which enhances the computational speed too.

The linear system resolution algorithm we use is a conjugated gradient method. For this algorithm, a starting point is required, and we use the results of the former alternate minimization step, considering this way that the convergence rate of the alternate minimization is low enough to produce results close one from another.

A second enhancement is the implementation a a Jacobi (diagonal) preconditioning, inside the conjugate gradient algorithm: the conjugate gradient direction for the resolution of $A.x = b$ is that of $D^{-1}.A.D^{-t}$, instead of that of A , where $[D]_{i,j} = \delta_{i,j}\sqrt{[A]_{i,j}}$. The jacobi preconditioning reduces the number of conjugate steps by a factor close to 2 for the u -problem and 3 for the v -problem.

At last, we need a stopping criterion for the alternate minimization. Since we didn't manage to prove the convergence of this sheme, we can't use an error majoration, then we decided to use the distance between the results of successive alternate minimization results, i.e. the norm of $v_n - v_{n-1}$ in H^1 , L^2 or L^∞ , as

desired, with an upper bound for the total number of alternate minimization steps.

3.4.5 Domain decomposition

Since both computational time and memory requirement dependence on the number of pixels are more than linear, for finite element method, we implemented a domain decomposition method: each image is decomposed into sub-images and the minimization of $E_{c,h}$ is computed on each subimage.

The difficulty in such an algorithm resides in the lack of continuity of u and v on subdomain boundaries: deformations could then appear across the subdomain boundaries. We show in the next Section how to control the edges deformation across subdomain boundaries, but the lack of continuity of u should, in truth, necessitate a better decomposition algorithm, which may use, for example, overlapping subdomains.

In Table 3.5.1 and 3.5.1, we present some computational time and parameter for a 256 by 256 image, with several decomposition.

Table 3.5.1 is related on computations without preconditioning, and Table 3.5.1 is related on computations with a Jacobi preconditioning.

It is important to remark that even with those enhancements, between 50 and 75 % of the computation time is spent in implementing the conjugate gradient method: thus any improvement in the linear system resolution results in an important decrease in computational time.

3.5 Numerical results

3.5.1 Edge geometry

The following regularity conjectures on the minimizing set Γ for \mathcal{E} can be found in [MS89] Theorem 2.1, p 599:

- Γ meets $\partial\Omega$ perpendicularly,
- a point $P \in \Omega$, is the end of 0, 1 or 3 edges (i. e. corners, cuspidal points

and cross point are not allowed), and if P is a triple point, the arcs meet with angles $\frac{2\pi}{3}$.

Those geometrical restrictions lead to two kinds of edge deformations : across the subdomain boundaries and at edge corners or intersection inside each subdomain. In view to decompose the domain into several subdomains, we want to prevent from the first effect.

We now focuss to the intersection of a sub domain and a circle of radius R , centered at the point where an edge, Γ , crosses the boundary. We suppose that Γ is a segment, crossing the boundary into an angle θ and that g equals 1, above Γ and 0, otherwise (see figure 3.2(a) for the geometrical construction). Then, we build a second edge set, denoted by Γ_2 , derived from Γ and such that from a distance l from the boundary, Γ has been replaced by an arc of radius r , crossing the boundary perpendicularly (see figure 3.2(b) for the geometrical construction). By imposing that the arc is tangent to the theoretical edge, we get $r = l \cdot \cot \theta$.

Let \mathcal{E}_1 and \mathcal{E}_2 be the total energy of each configuration; then

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= R.\alpha, \text{ while since } |\Gamma_2| = R - l.(1 - \theta \cdot \cot \theta) \text{ and } |\Omega_e| = \frac{r.l}{2} - \frac{r^2}{2}\theta, \\ \mathcal{E}_2 &= \frac{l^2 \cdot \beta \cdot \cot \theta}{2} \cdot (1 - \theta \cdot \cot \theta) - l \cdot \alpha \cdot (1 - \theta \cdot \cot \theta) + R \cdot \alpha.\end{aligned}$$

We now minimize \mathcal{E}_2 over all $l \leq R$: if $R \geq \frac{\alpha}{\beta} \tan \theta$, the minimum value is reached for $l = \frac{\alpha}{\beta} \tan \theta$ and is equal to $R \cdot \alpha - \frac{\alpha^2}{\beta} (\tan \theta - \theta)$. Since, for $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\tan \theta - \theta \geq 0$, we obtain $\mathcal{E}_2 \leq \mathcal{E}_1$, and the detected edge set will be different from the theoretical one at the point where it crosses the subdomain boundaries, if not perpendicular.

In Figure 3.3(b), we decomposed the image of Figure 3.3(a) into two vertical bands; the resulting deformation of the edge is demonstrated.

One can however estimate the radius of the area where such deformation appears as a linear function of $\frac{\alpha}{\beta}$ (see the expression of the optimal l above). Then, a proper choice of $\frac{\alpha}{\beta}$ should be such that the radius is less than the width of a pixel; in such a case, the edge will take its theoretical shape (see Figure 3.3(c)).

The resolution parameter for figures 3.3 are for Figure 3.3(b): $\alpha = 5.10^{-3}$, $\beta = 2.10^{-2}$ and $c = 4.10^{-2}$, for Figure 3.3(c): $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 5.10^{-1}$ and $c = 4.10^{-2}$.

A similar argument can be used to show that there are no corner or cuspidal point allowed for the optimal edge set but that, with a proper adjustment of the parameters α and β the deformation can be controlled and inscribed inside a pixel.

Figures 3.4 and 3.5 show deformed corners and cuspidal points for the set of parameters $\alpha = 5.10^{-3}$, $\beta = 2.10^{-2}$ and $c = 4.10^{-2}$, while Figures 3.6 and 3.7 show results based on the same images, with adjusted parameters, so as to generate the real edge geometry.

In Figure 3.8, we present a numerical result for a standard image, "Lenna" (Figure 3.8(a)): the soft image, corresponding to u (Figure 3.8(b)) and the edge set v (Figure 3.8(c)).

In Figure 3.9(a), we magnify a detail from Figure 3.8(a) and perturb it with random noise (salt and pepper noise with maximal intensity ± 80); the results are presented in Figure 3.9(b) and Figure 3.9(c); they demonstrate the sturdiness of the algorithm when subject to random noise.

In Figure 3.10(a), we took a rastered portrait of A. Einstein (magnification of a printed image) and used our algorithm. The results are shown in Figure 3.10(b) and Figure 3.10(c); they are unaffected by periodical perturbations.

Acknowledgements

The author would like to thank A. Chambolle and G. Francfort for their helpful advices.

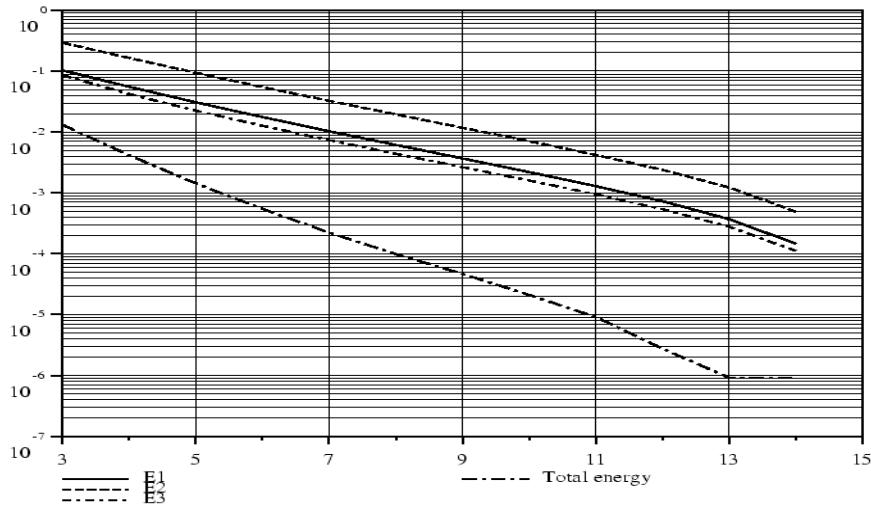


Figure 3.1: Relative error of the different parts of the functional.

Size of the subimages	Time	Alt. min. steps	C. G. steps (u)	C. G. steps (v)
128 x 128	149 s	9	225	233
64 x 256	82 s	9	223	249
64 x 64	85 s	48	959	895
32 x 128	52 s	48	1001	912
16 x 256	36 s	48	1094	1003
32 x 32	46 s	218	3726	2867
16 x 64	31 s	217	3793	2859

Table 3.1: Computation on a 256 x 256 pixels images with $\alpha = 5.10^{-3}$, $\beta = 5.10^{-1}$, $c = 10^{-1}$, without Jacobi preconditioning.

Size of the subimages	Time	Alt. min. steps	C. G. steps (u)	C. G. steps (v)
128 x 128	84 s	9	121	73
64 x 256	49 s	9	122	74
64 x 64	57 s	48	566	325
32 x 128	36 s	48	559	319
16 x 256	26 s	48	569	336
32 x 32	36 s	218	2237	1214
16 x 64	26 s	217	2247	1216

Table 3.2: Computation on a 256 x 256 pixels images with $\alpha = 5.10^{-3}$, $\beta = 5.10^{-1}$, $c = 10^{-1}$, with Jacobi preconditioning.

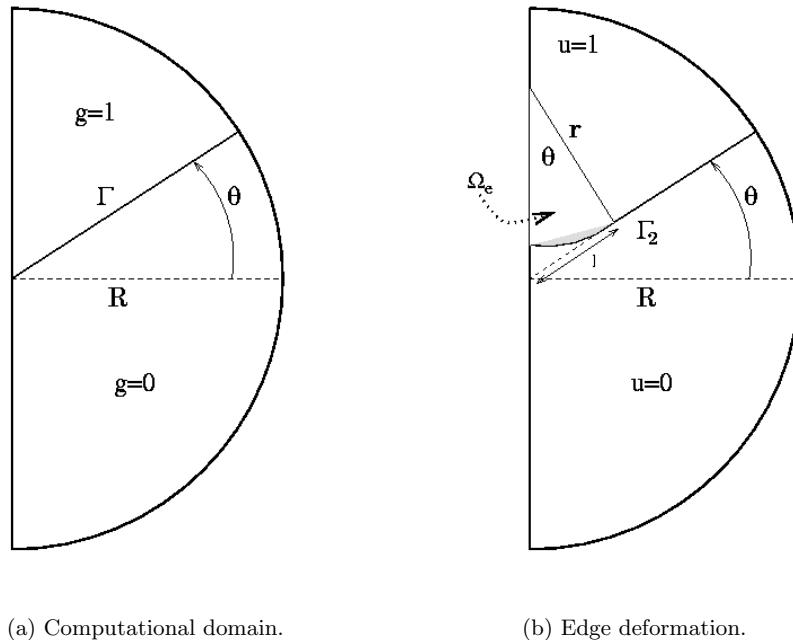
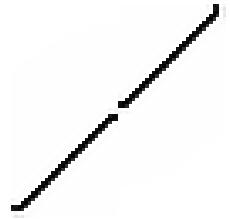


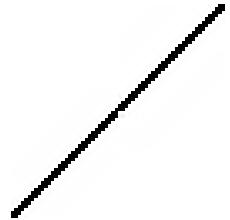
Figure 3.2: Edge deformation across boundary.



(a) Starting image.



(b) Deformed edge set.



(c) Theoretical edge set.

Figure 3.3: Different behavior of edges across the subdomain boundary.



(a) Starting image.



(b) Edge set "v".



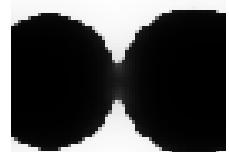
(c) Soft image "u".

Figure 3.4: Angle with $c = 4.10^{-2}$, $\alpha = 5.10^{-3}$, $\beta = 2.10^{-2}$, $k_c = 5.10^{-3}$.

(a) Starting image.



(b) Edge set "v".



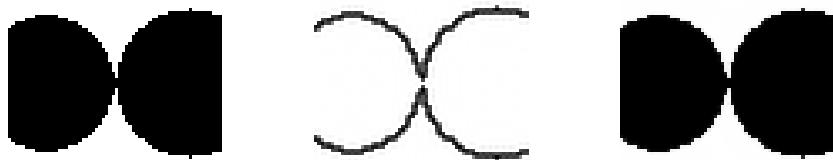
(c) Soft image "u".

Figure 3.5: Cuspidal point with $c = 4.10^{-2}$, $\alpha = 5.10^{-3}$, $\beta = 2.10^{-2}$, $k_c = 5.10^{-3}$.



(a) Starting image. (b) Edge set "v". (c) Soft image "u".

Figure 3.6: Square angle with $c = 4.10^{-3}$, $\alpha = 2.10^{-1}$, $\beta = 5.10^{-1}$.

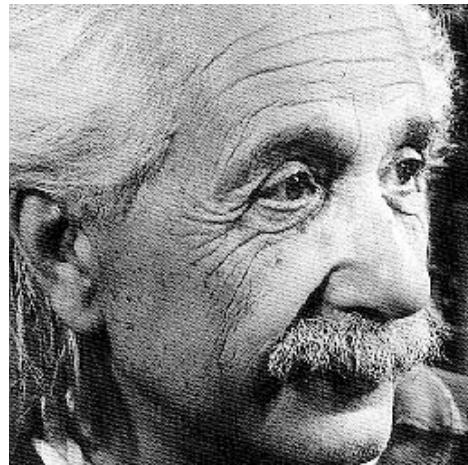
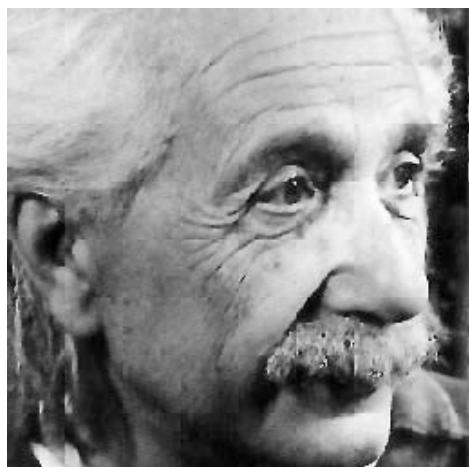


(a) Starting image. (b) Edge set "v". (c) Soft image "u".

Figure 3.7: Cuspidal point with $c = 4.10^{-3}$, $\alpha = 2.10^{-2}$, $\beta = 1$.

(a) Starting image, 480×480 pixels.(b) Soft image " u ".(c) Edge set " v ".Figure 3.8: Computation for $\alpha = 5.10^{-3}$, $\beta = 5.10^{-1}$, $c = 10^{-1}$.

(a) Starting image, 256×256 pixels.(b) Soft image " u ".(c) Edge set " v ".Figure 3.9: Computation for $\alpha = 2.10^{-2}$, $\beta = 5.10^{-1}$, $c = 10^{-1}$.

(a) Starting image, 256×256 pixels.(b) Soft image " u ".(c) Edge set " v ".Figure 3.10: Computation for $\alpha = 2.10^{-2}$, $\beta = 5.10^{-1}$, $c = 10^{-1}$.

Bibliography

- [AT90] L. Ambrosio and V. M. Tortorelli. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionnals via Γ -convergence. *Comm. Pure Appl. Math.*, 43:999–1036, 1990.
- [AT92] L. Ambrosio and V. M. Tortorelli. On the approximation of free discontinuity problems. *Boll. Un. Mat. Ital.*, VI-B:105–123, 1992.
- [BC94] G. Bellettini and A. Coscia. Discrete approximation of a free discontinuity problem. *Num. Funct. Anal. Optim.*, 15:201–224, 1994.
- [Bon96] A. Bonnet. On the regularity of the edge set of Mumford-Shah minimizers. *Prog. in Nonlinear Differential Equation and Their Applications*, 25:93–103, 1996.
- [Bre89] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1989.
- [Cha95] A. Chambolle. Image segmentation by variational methods : Mumford and Shah functional and the discrete approximations. *SIAM J. Appl. Math.*, 55 No. 3:827–863, 1995.
- [Cia87] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, 1987.
- [DGCL89] E. De-Giorgi, M. Carriero, and A. Leaci. Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set. *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, 108:195–218, 1989.
- [DS] F. Dibos and E. Séré. An approximation result for the minimizers of the Mumford-Shah functional. *Boll. Un. Mat. Ital.*, to appear.
- [EG92] L. C. Evans and R. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [FVP95] S. Finzi-Vita and P. Perugia. Some numerical experiments on the variational approach to image segmentation. In *Proc. of the Second European Workshop on Image Processing and Mean Curvature Motion*, pages 233–240, Palma de Mallorca, September 25-27 1995.

- [MS89] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure App. Math.*, XLII:577–685, 1989.
- [RM97] T.J. Richardson and S.K. Mitter. A variational formulation based edge focussing algorithm. *Sadhana Acad. P. Eng. S.*, 22(4):553–574, 1997.

Chapitre 4

Mise en œuvre numérique du problème de Mumford-Shah par une méthode d’éléments finis adaptative

IMPLEMENTATION OF AN ADAPTIVE FINITE-ELEMENT APPROXIMATION OF THE MUMFORD-SHAH FUNCTIONAL.

Blaise Bourdin¹

Antonin Chambolle²

Abstract

We present and detail a method for the numerical solving of the Mumford-Shah problem, based on a finite element method and on adaptive meshes. We start with the formulation introduced in [CD98], detail its numerical implementation and then propose a variant which is proved to converge to the Mumford-Shah problem. A few experiments are illustrated.

4.1 Introduction

In order to solve the image segmentation problem, D. Mumford and J. Shah have proposed in [MS89] to minimize over u and K the functional

$$\mathcal{G}(u, K) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \mathcal{H}^1(K) + \int_{\Omega} |u(x) - g(x)|^2 dx,$$

where $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ is the image domain (a bounded open two-dimensional domain), $g \in L^\infty(\Omega)$ is the original image, that has to be segmented, K is a closed set of Hausdorff one-dimensional measure $\mathcal{H}^1(K)$ and $u \in C^1(\Omega \setminus K)$. The set K is supposed to represent the *edges* of the segmented image u that is regular out of K and can be discontinuous across K (see Appendix 4.3.3 for details).

The actual minimization of \mathcal{G} is a difficult problem, that has been addressed by many authors. Mumford and Shah themselves derived their energy from

¹LPMTM (CNRS UPR 9001), Institut Galilé, Université Paris-XIII, Av. J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

²CEREMADE (CNRS UMR 7534), Université de Paris-Dauphine, 75775 Paris CEDEX 16, France.

discrete energies introduced by D. Geman and S. Geman [GG84] and A. Blake and A. Zisserman [BZ87], and these works can be seen as a first attempt to minimize \mathcal{G} by a finite differences approach. In [AT90], L. Ambrosio and V.-M. Tortorelli proposed an approximation of \mathcal{G} , depending on a scale parameter $c > 0$, in which the set K was approximated in some sense by a function v , making thus easier the discretization of the problem. This led G. Bellettini and A. Coscia to propose a finite elements approximation in [BC94], adapted and implemented by S. Finzi-Vita and P. Perugia [FVP95] and B. Bourdin [Bou98]. In all these approaches, the quality of the approximation is very poor if c , the discretization step ε , and ε/c are not very small, so that the computations must be performed on a very fine mesh.

In [CD98], A. Chambolle and G. Dal Maso have proposed a different finite elements approach, that is not derived from Ambrosio and Tortorelli's approximation result, and relies only on one scale parameter (the discretization step ε). On the other hand, unlike the previous methods, it requires an adaption of the triangulation in order to approximate correctly the theoretical Mumford-Shah energy. We show in this paper how to deal with this difficulty.

Although this method seems very complicated, it is a promising approach and has been successfully implemented for a brittle fracture formulation proposed by G. Francfort and J.-J. Marigo in [FM98], that is similar to the Mumford-Shah problem. In that particular case, a finite elements method is natural. Furthermore, one wants to localize the cracks as well as possible, and the mesh adaption method described in this paper is a real advantage since it doesn't require the use of a very thin mesh to do so.

In what follows, we recall the results of [CD98]. We then propose a variant whose interest will be discussed in section 4.2, where the numerical implementation of both formulations are described. Then, in section 4.3, we prove that our variant actually approximates the Mumford-Shah functional, in the sense of the Γ -convergence, a notion of variational convergence introduced by De Giorgi (see for instance [Dal93] and appendix 4.3.3).

In the whole paper, The set Ω is a bounded domain of \mathbf{R}^2 , with Lipschitz-regular boundary. A *triangulation* of Ω is a finite family of (closed) triangles covering Ω , and such that the intersection of any two such triangles, if not empty,

is either an edge or a vertex common to both triangles. Following [CD98], we fix some angle $\theta_0 > 0$ ($\theta_0 \leq 60^\circ$), a constant $c \geq 6$, and let for any $\varepsilon > 0$ $\mathcal{T}_\varepsilon(\Omega) = \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega, c, \theta_0)$ be the set of all triangulations of Ω whose triangles T have the following characteristics

- the length of all three edges of T is between ε and $c\varepsilon$,
- the three angles of T are greater than or equal to θ_0 .

We call $V_\varepsilon(\Omega)$ the set of all continuous functions $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ such that u is affine on any triangle $T \in \mathbf{T}$ (more precisely, on $T \cap \Omega$) of some triangulation $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$, and given such a u , $\mathcal{T}_\varepsilon(u) \subseteq \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$ is the set of all triangulations *adapted* to u , i.e., such that this property is satisfied (for “most” u , $\mathcal{T}_\varepsilon(u)$ has just one element, if $u = \text{constant}$ $\mathcal{T}_\varepsilon(u) = \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$). Given a triangle T we denote by h_T its smallest height. If T belongs to some triangulation of $\mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$, then $\varepsilon \sin \theta_0 \leq h_T \leq \varepsilon c \sqrt{3}/2$.

Throughout the whole paper, we fix, as in [BD96, CD98], a non-decreasing continuous function $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ such that

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f_\infty. \quad (4.1)$$

The simplest case is $f(t) = \min(t, f_\infty)$. For the sake of simplicity, we will also assume that

$$f(t) \leq \min(t, f_\infty) \text{ for all } t \geq 0 \quad (4.2)$$

(in the practical applications f is concave and this condition is obviously satisfied).

Fix $p \in [1, +\infty)$. In [CD98], the following functional $G_\varepsilon(u, \mathbf{T})$ is introduced, for any $u \in L^p(\Omega)$ and $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$:

$$G_\varepsilon(u, \mathbf{T}) = \begin{cases} \sum_{T \in \mathbf{T}} |T \cap \Omega| \frac{1}{h_T} f(h_T |\nabla u_T|^2), & \text{if } u \in V_\varepsilon(\Omega), \mathbf{T} \in \mathcal{T}_\varepsilon(u), \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4.3)$$

where ∇u_T denotes the (constant) gradient of u on the triangle T . Then, if for any u we set

$$G_\varepsilon(u) = \min_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)} G_\varepsilon(u, \mathbf{T}), \quad (4.4)$$

(which means, practically, that the “best” triangulation adapted to u is chosen) it is proved that, as ε goes to zero and provided θ_0 is less than some $\Theta > 0$, G_ε Γ -converges to the Mumford-Shah functional

$$G(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + f_\infty \mathcal{H}^1(S_u), & \text{if } u \in L^p(\Omega) \cap GSBV(\Omega), \\ +\infty, & \text{if } u \in L^p(\Omega) \setminus GSBV(\Omega), \end{cases} \quad (4.5)$$

where the space $GSBV(\Omega)$ and the essential jumps set S_u are defined in Appendix 4.3.3. The definition and basic properties of the Γ -convergence are reviewed in Appendix 4.3.3, we just recall that what we are mainly interested in is the fact that the minimizers of G_ε will be, as ε becomes infinitesimal, good approximations of minimizers of G .

In the next section 4.2, we describe a way to implement numerically the minimization of G_ε . The results are quite good, but the method is subject to numerical instabilities. We introduce therefore a “stabilized” version in the following way, that is inspired by an approximation of A. Braides and G. Dal Maso. In [BD96], they introduce the non-local functional

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} f \left(\frac{1}{|B_\varepsilon(x) \cap \Omega|} \int_{B_\varepsilon(x) \cap \Omega} |\nabla u(y)|^2 dy \right) dx \quad (4.6)$$

and show that it Γ -converges, as ε goes to 0, to $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + 2f_\infty \mathcal{H}^{n-1}(S_u)$, provided f satisfies conditions (4.1). Unfortunately, this formulation doesn’t fit easily into a finite elements implementation. We follow a slightly different approach, replacing the mean on the ball $B_\varepsilon(x)$ in (4.6) by an averaging operator that depends on the triangulation.

Given a triangulation \mathbf{T} , we define on the Euclidean space $\mathbf{R}^\mathbf{T}$ the operator $M : \mathbf{R}^\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}^\mathbf{T}$ such that for any $v = (v_T)_{T \in \mathbf{T}} \in \mathbf{R}^\mathbf{T}$,

$$(Mv)_T = M_T(v) = \frac{\sum_{T' \in \mathbf{T}, T' \cap T \neq \emptyset} |T' \cap \Omega| v_{T'}}{\sum_{T' \in \mathbf{T}, T' \cap T \neq \emptyset} |T' \cap \Omega|}. \quad (4.7)$$

If v is considered as a piecewise constant function on Ω , such that $v \equiv v_T$ on each triangle $T \in \mathbf{T}$, $M_T(v)$ is therefore the mean of v over T and all the neighboring triangles T' . We introduce on $\mathbf{R}^\mathbf{T}$ the scalar product

$$(u, v) = \sum_{T \in \mathbf{T}} |T \cap \Omega| u_T \cdot v_T.$$

It is simple to check that, with respect to this scalar product, the adjoint of M is given by

$$(M^*v)_T = M_T^*(v) = \sum_{T' \in \mathbf{T}, T' \cap T \neq \emptyset} \frac{|T' \cap \Omega|}{S_{T'}} v_{T'},$$

where $S_T = \sum_{T' \cap T \neq \emptyset} |T' \cap \Omega|$.

For $u \in L^p(\Omega)$ and $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$, the new functional is

$$F_\varepsilon(u, \mathbf{T}) = \begin{cases} \sum_{T \in \mathbf{T}} |T \cap \Omega| \frac{1}{h_T} f(h_T M_T^*(|\nabla u|^2)), & \text{if } u \in V_\varepsilon(\Omega), \mathbf{T} \in \mathcal{T}_\varepsilon(u), \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4.8)$$

and $F_\varepsilon(u)$ is defined on $L^p(\Omega)$ by a formula similar to (4.4). Then, if we let

$$F(u) = \begin{cases} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + 3f_\infty \mathcal{H}^1(S_u), & \text{if } u \in L^p(\Omega) \cap GSBV(\Omega), \\ +\infty, & \text{if } u \in L^p(\Omega) \setminus GSBV(\Omega), \end{cases} \quad (4.9)$$

we have the following theorem, that holds for any $p \in [1, +\infty)$.

Theorem 1. *There exists $\Theta > 0$ such that if $\theta_0 \leq \Theta$, F_ε Γ -converges to F in $L^p(\Omega)$ as ε goes to zero.*

We do not know whether the upper bound Θ is the same as in the previous result of [CD98], however, both are larger than 18° .

Remark For technical reasons, the adjoint M^* of M has to be used in the definition (4.8) of $F_\varepsilon(u, \mathbf{T})$. If M were used instead, the Γ -limit of F_ε would be strictly below F , although the exact form is not clear. However, the example in Appendix 4.3.3 shows that the optimal triangulation one would have to use in this case in order to get a good estimate of the limiting energy is a very complex, “oscillating” triangulation, that it would be absurd, if not impossible, to try to build.

We finally state the following compactness result, that ensures that functional F can be approximated by means of functional F_ε in a “practical” sense.

Theorem 2. Let $p \in [1, +\infty)$ and $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ be a family of functions such that $u^\varepsilon \in V_\varepsilon(\Omega)$ for all ε and

$$\sup_{\varepsilon>0} F_\varepsilon(u^\varepsilon) + \|u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} < +\infty.$$

Then there exists $u \in GSBV(\Omega)$ and a subsequence u^{ε_j} converging to u a.e. in Ω , such that

$$F(u) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F_{\varepsilon_j}(u^{\varepsilon_j}). \quad (4.10)$$

In particular, if $g \in L^p(\Omega)$ and for each $\varepsilon > 0$, u^ε is a solution of the problem

$$\min_{v \in L^p(\Omega)} F_\varepsilon(v) + \int_{\Omega} |v(x) - g(x)|^p dx, \quad (4.11)$$

then the limit u solves

$$\min_{v \in L^p(\Omega)} F(v) + \int_{\Omega} |v(x) - g(x)|^p dx, \quad (4.12)$$

and, if $p > 1$, the sequence u^{ε_j} strongly converges to u .

4.2 Numerical implementation

In this section, we describe the scheme we propose for minimizing

$$G(u) + \beta \int_{\Omega} |u(x) - g(x)|^2 dx, \quad (4.13)$$

where g is the original image and $\beta > 0$ a fixed parameter. Since G_ε Γ -converges to G [CD98], an approximation of the solution can be computed by minimizing the functional

$$G_\varepsilon(u) + \beta \int_{\Omega} |u(x) - g(x)|^2 dx \quad (4.14)$$

for a “small enough” ε . Since G_ε depends on u but also on the triangulation on which u is defined, this problem is achieved by finding both a minimizing function u and an optimal triangulation \mathbf{T} , adapted to u , such that (u, \mathbf{T}) minimizes $G_\varepsilon(u, \mathbf{T}) + \beta \int_{\Omega} |u - g|^2 dx$. A huge difficulty, in view of a finite element implementation, is the fact that the optimal mesh depends on the unknown solution that is to be computed.

4.2.1 Minimization method

When estimating the Γ -limsup of G_ε , one has to build, given a function u , an optimal sequence of functions and their associated meshes $(u_\varepsilon, \mathbf{T}_\varepsilon)$ such that

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} G_\varepsilon(u_\varepsilon, \mathbf{T}_\varepsilon) \leq G(u).$$

This is done in [CD98, Sec. 4], but the sequence built in section 4.3.2 for the functionals F_ε , F could also be used for G_ε and G . If we knew in advance a minimizer u for (4.13) and its jump set S_u , these constructions would show us how to build the optimal triangulation for the approximated problem (4.14). This minimizer u being obviously unknown (since it is exactly what we are looking for), we propose to deduce some nearly optimal triangulation from a previously computed approximation u_ε , assuming that it is “close”, in some sense, to u . The following iterative algorithm, that can also be seen as a relaxation algorithm between both unknown for (4.3) is then natural.

- *initialization* (background mesh generation):
given ε_0 , choose an arbitrary (regular) triangulation $\mathbf{T}_{\varepsilon_0}$.
- *iteration i* (minimization process):
 - i) find u_i solving $\min_{u \in V_{\varepsilon_i}(\Omega)} G_{\varepsilon_i}(u, \mathbf{T}_{\varepsilon_i}) + \beta \int_{\Omega} |u - g|^2 dx$
 - ii) mesh adaption: build the mesh $\mathbf{T}_{\varepsilon_{i+1}}$, according to the function u_i and the choice of ε_{i+1} (that can be the same as ε_i).

In sections 4.2.1 and 4.2.1, we detail the method we use to achieve points *i*) and *ii*). Note however that we do not know how to *really* minimize (4.14) with respect to the triangulation, and just *estimate* some triangulation that seems optimal, according to the construction in section 4.3.2.

Minimization of (4.8) for a fixed \mathbf{T}_ε

In this section, we assume that a triangulation \mathbf{T}_ε is given and show how to minimize $G_\varepsilon(u, \mathbf{T}_\varepsilon)$ with respect to u , for u , piecewise linear on each element $T \in \mathbf{T}_\varepsilon$ and continuous on Ω . Of course, the energies we are dealing with, that are strongly non convex, may have many local minimizers. We can never be sure that we will not compute one of these. However, the iterative algorithm

we propose, which is classical in image reconstruction methods (see [GR92], and for instance [ABCBF94]) ensures that the energy decreases at each iteration and converges to some critical value. It has been successfully used for other similar problems (see for instance [Cha98]).

In what follows, we suppose that the function f is concave and differentiable and that $f(0) = 0$, which is a consequence of (4.2). Thus, extending f with the value $-\infty$ on $]-\infty, 0]$, $-f$ is convex and lower semi-continuous. Let

$$\psi(-v) = \sup_{t \in \mathbf{R}} tv - (-f)(t) = (-f)^*(v).$$

be the Legendre-Fenchel transform of f , by a classical result (see for example [ET76]), $(-f)^{**} = -f$, so that

$$-f(t) = \sup_{v \in \mathbf{R}} -\psi(-v) = \inf_{v \in \mathbf{R}} tv + \psi(v)$$

It is well known that the first sup in this equation is attained at v such that $t \in \partial(-f)^*(v)$ (the subdifferential of $(-f)^*$ at t), and that it is equivalent to $v \in \partial(-f)(t)$, and since $\partial(-f)(t) = \{-f'(t)\}$ for $t > 0$ and $]-\infty, -1]$ for $t = 0$, we deduce that the sup is reached at some $v \in [-1, 0]$ (since for $t = 0$ we check that $(-f)^*(-1) = 0$ and thus the sup is reached at $v = -1$). Hence,

$$f(t) = \min_{v \in [0, 1]} tv + \psi(v)$$

and the min is reached for $v = f'(t)$. Given \mathbf{T}_ε , the minimization of (4.3) is then equivalent to that of

$$G'_\varepsilon(u, v, \mathbf{T}_\varepsilon) = \sum_{T \in \mathbf{T}_\varepsilon} |T \cap \Omega| \left(v_T |\nabla u_T|^2 + \frac{\psi(v_T)}{h_T} \right) \quad (4.15)$$

over all $u \in V_\varepsilon(\Omega)$ and $v = (v_T)_{T \in \mathbf{T}_\varepsilon}$, piecewise constant on each $T \in \mathbf{T}_\varepsilon$.

This problem is still non linear and non convex, but for fixed u , the minimizer over each v is explicitly given by

$$v_T = f'(h_T |\nabla u_T|^2) \quad (4.16)$$

and the optimal u for fixed v solves an elliptic equation.

The use of relaxation method for the solving of (4.15) is then natural and our algorithm is:

i) *initialization*

Choose u_0 and v_0 ,

ii) iteration

fixed v , find $u \in V_\varepsilon(\Omega)$, minimizing

$$\sum_{T \in \mathbf{T}_\varepsilon} \int_{T \cap \Omega} v_T |\nabla u_T|^2 dx + \beta \int_{\Omega} |u - g|^2 dx. \quad (4.17)$$

Then, fixed u , compute the new v using equation (4.16).

In particular, note that we do not need to compute the Legendre-Fenchel transform of function f , neither for the minimization of (4.3) nor for its computation. The minimization with respect to v is explicit while the minimization with respect to u is a simple (linear) problem, since the energy is convex and quadratic. Its solving is achieved by the use of a standard finite element method, since the triangulation used is usually unstructured (i.e. not a grid), due to the mesh adaption process, described in the following section. Since the v field is piecewise constant, the solving of (4.17) is very efficient and doesn't require a complicated assembly procedure for the finite element matrix, compared to the method described in [Bou98].

Mesh adaption

For the generation of the adapted triangulation, we use the automatic mesh generator BL2D, developed at the INRIA³ (see [BL96b] and [BL96a] for details about anisotropic mesh generation).

Prior to describing the mesh adaption method, one has to introduce a few notions. The *background mesh* is an existing mesh that one wishes to adapt to a *foreground mesh*. The foreground mesh is built from the background mesh by the use of an *estimator* which consists in giving a *metric* at each point of the background mesh. This metric is defined by a symmetric definite positive 2×2 matrix A that identifies the points (x, y) at distance 1 from the reference point with the ellipsis $(x, y)A^t(x, y) = 1$.

Up to a rotation of angle θ and a translation, this ellipsis is described by the equation $x^2/h_1^2 + y^2/h_2^2 = 1$ (h_1^{-2} , h_2^{-2} being thus the eigenvalues of A). The three quantities (θ, h_1, h_2) are related to the orientation and anisotropy factor of the elements in the adapted triangulation. The foreground mesh is then built

³available at <http://www-rocq.inria.fr/gamma/cdrom/www/bl2d/eng.htm>

as a Delaunay triangulation, with respect to the metric, given at each point of the background triangulation. A complete description of the algorithms used for the building of such adapted meshes and of the theories involved is to be found in [BL96b].

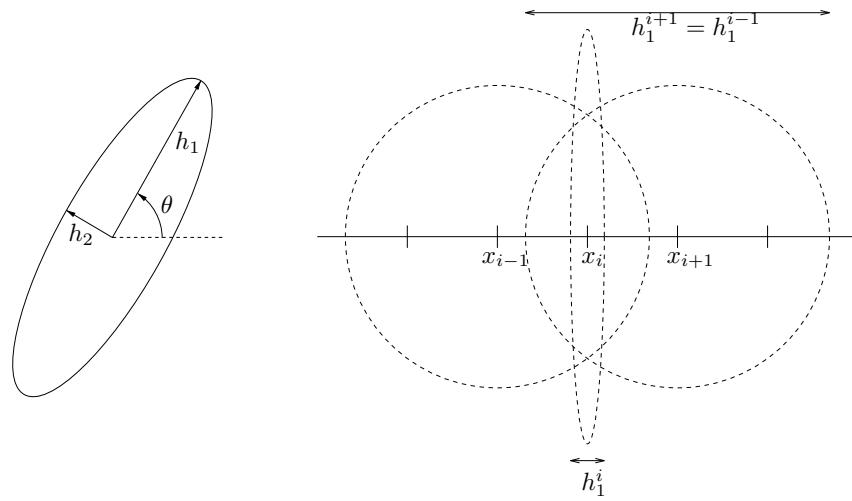
The *anisotropy ratio* of an element, defines the ratio between its smallest and its largest height, i.e. $R(T) = \min_{i \in \{1,2,3\}} (h_T/h_i)$, h_i , being the i^{th} height of T , the *orientation* of an element is that of its longest edge.

The optimal triangulation for problem (4.3) as described in section 4.3.2 is such that “close” to the edge set the elements have an high anisotropy ratio and an orientation parallel to the edge, while “far” from the edges the elements may have an anisotropy ratio close to 1. This description is intentionally unprecise, since in the minimization process, we don’t have any description of the theoretical edge set. Thus, one has to build the estimator by the use of the functions u and v , computed on the background mesh.

The first idea is then to use the value of v , so as to set the anisotropy (h_1 and h_2) and the gradient of u for the angle θ , since v is supposed to be close to 0, near the edges and close to 1, otherwise, while the gradient of u , on the set where $v = 0$ should represent the normal to S_u . Unfortunately, this method causes several problems:

- A first technical problem is that one has to build the estimator at each node of the background mesh, while both v and ∇u are piecewise constant on \mathbf{T}_ε and then not uniquely defined on the nodes.
- Another problem is the regularity of the fields v and ∇u : if (u, v) are minimizers for (4.3), then across the area where $v \simeq 0$, the gradient of u is oscillating and its direction is related more to the orientation of the elements rather than to the real orientation of the jump set. Indeed, u being nearly constant on each side of its jump, its gradient inside each triangle is perpendicular to the edge along which u is constant. If we use this information without care, the adapted triangulation will thus be too sensitive to the background mesh.
- Then, one needs the h_1 and h_2 values of the estimator to be smooth enough, to ensure that the adaption is feasible. This need can be easily illustrated

in an unidimensional problem. Set $x^i = i.h$, the coordinate of the nodes of the 1D mesh, h , the mesh size. In that particular case, the metric for the estimator is defined by only parameter, denoted by h_1^i . If $h_1^{i-1} = h_1^{i+1} \gg h$ and $h_1^i \ll h$ then, one cannot build a triangulation with respect to the estimator. This problem is illustrated in Figure 4.1(b).



(a) The unit ball of the metric (θ, h_1, h_2) in the reference metric.

(b) An uncorrectly defined metric.

Figure 4.1: Estimators.

The technique we use for preventing such effects is a regularization of the minimizers u and v . A possible method is to regularize v by iterating n times the operator M_T defined in equation (4.7), and to truncate it at an arbitrary lower value V_R^{\min} : $v_R = ((M_T)^n(v) \vee V_R^{\min})$. Then, the regularized function u_R is computed by replacing v by v_R in the problem in u (4.17). With a good choice for n and V_R^{\min} , it is then possible to deduce usable h_1 and h_2 from v_R and θ from ∇u_R . A typical choice for both parameter is $n \simeq 10$ and $V_R^{\min} \simeq 0.5$.

The algorithm for the minimization of G_{ε_i} for a fixed mesh $\mathbf{T}_{\varepsilon_i}$ and the generation of $\mathbf{T}_{\varepsilon_{i+1}}$ is then:

- i) *initialization,*

set u_0 and v_0 , possibly using the results of a previous fixed triangulation problem.

ii) minimization,

minimize (4.8), by solving iteratively the problems (4.17) and (4.16) until numerical convergence.

iii) regularization,

set u_R and v_R , as described above.

iv) estimation,

choose ε_{i+1} and deduce from ε_{i+1} , v_R , ∇u_R , and the direction of ∇u_R “good” values for (h_1, h_2, θ) .

v) adaption,

run program BL2D with input values (h_1, h_2, θ) to build $\mathbf{T}_{\varepsilon_{i+1}}$, and restart from $i..$

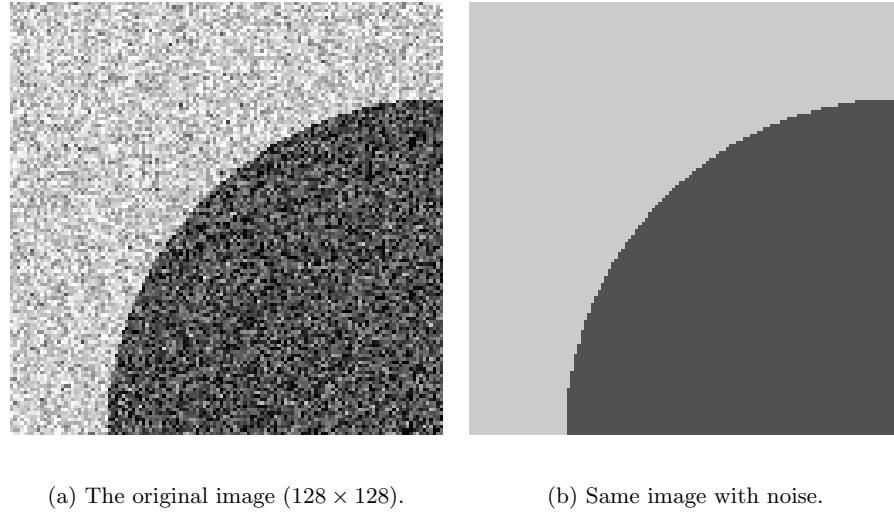
4.2.2 Examples

In the following tests, we use $f(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \arctan(\frac{\pi x}{2\alpha})$, so that the weight on the edge set is $f_\infty = \alpha > 0$.

The initial mesh used for all experiments is shown in Figure 4.3(a).

In Figure 4.3, we present the result of the segmentation of the image shown in Figure 4.2(a) after 2 mesh adaption processes. The successive values (in pixels unit) for h_1 and h_2 are: (3.0,3.0) for the background mesh; (1.0,7.5) close to the edges and (10.0,10.0) far from the edges for the first adaption; (1.0,10.0) and (10.0,10.0) for the second adaption. The other parameters are $\alpha = 400$, $\beta = 0.05$. The edges are well focussed and at their right position. The theoretical surface energy is 6.28×10^4 and the computed one is 6.46×10^4 . The adapted mesh is shown on Figure 4.3(b) and the field v on Figure 4.3(c). Note that the number of nodes in the successive meshes are 2298, 523 and 341. Since the mesh can be coarse far from the edges, the mesh adaption process permits to reduce the number of nodes used at each iteration.

Figure 4.4 shows the results for g as in Figure 4.2(b), with $\alpha = 200$ and $\beta = 0.05$, after 3 adaptions. The computed surface energy is 4.30×10^4 while the



(a) The original image (128×128). (b) Same image with noise.

Figure 4.2: Two artificial images to be segmented.

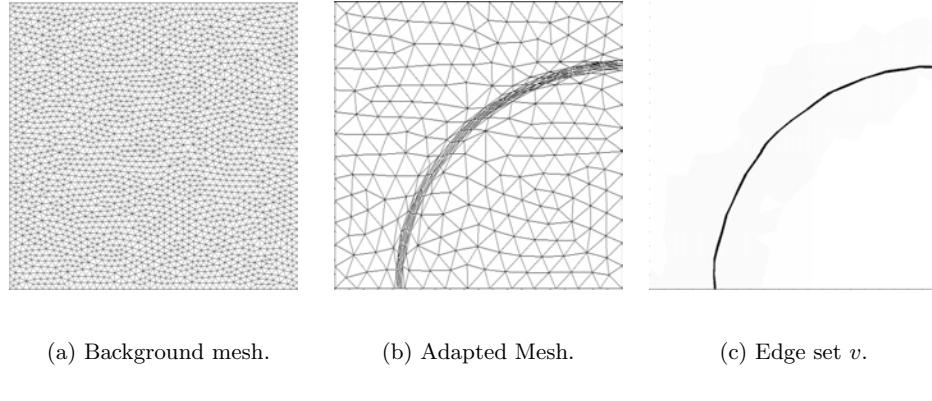


Figure 4.3: Segmentation of Figure 4.2(a).

theoretical one should be 3.14×10^4 . The edge set is broken at some points as shown in the detail 4.4(b). This is due to the very low noise sturdiness of the approximation G_ε . In some sense, the representation of the jump set in G_ε is very local. This could be seen as an advantage, since it should provide a more accurate estimate of the length of the jump set. Unfortunately, it also makes the edge detection more sensitive to noise so that the jump set that is detected is

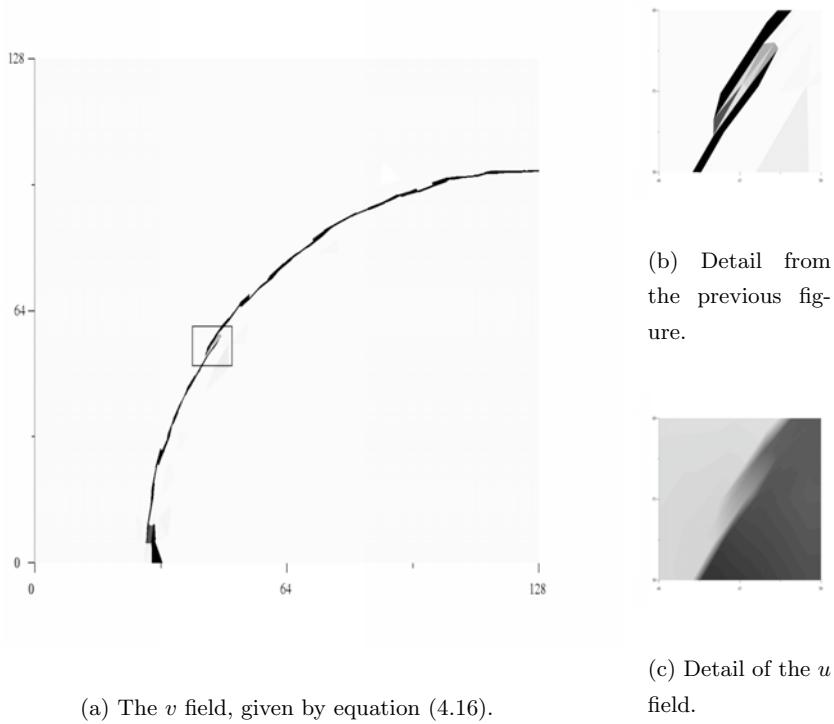


Figure 4.4: Segmentation of Figure 4.2(b)

deformed. It also seems that the scheme gets easily stuck in local minima, and is very sensitive to the initial guesses u_0 , v_0 and to mesh effects.

In order to reduce this numerical instability, we introduce in (4.8) the functional F_ε , which is a variant of G_ε in which a smoothing operator has been inserted.

4.2.3 The “stabilized” version

The algorithm for minimizing

$$F_\varepsilon(u, \mathbf{T}_\varepsilon) + \beta \int_{\Omega} |u(x) - g(x)|^2 dx \quad (4.18)$$

is similar to the one described above, with a few modifications. Indeed, we also introduce a piecewise constant field $v = (v_T)_{T \in \mathbf{T}_\varepsilon}$ and introduce the functional

$$F'_\varepsilon(u, v, \mathbf{T}_\varepsilon) = \sum_{T \in \mathbf{T}_\varepsilon} |T \cap \Omega| \left(v_T M_T^*(|\nabla u|^2) + \frac{\psi(v_T)}{h_T} \right).$$

The minimization of $F'_\varepsilon(u, v, \mathbf{T}_\varepsilon) + \beta \int_\Omega |u - g|^2 dx$ over v is explicit and is given by $v_T = f'(h_T M_T^*(|\nabla u|^2))$. In order to perform the minimization with respect to u , we rewrite F'_ε in the following way

$$F'_\varepsilon(u, v, \mathbf{T}_\varepsilon) = \sum_{T \in \mathbf{T}_\varepsilon} |T \cap \Omega| \left(M_T(v)(|\nabla u_T|^2) + \frac{\psi(v_T)}{h_T} \right),$$

so that the problem is the same as minimizing (4.17), with the v field being replaced by the field $w = (w_T)_{T \in \mathbf{T}_\varepsilon}$, given by

$$w_T = M_T(v) = M_T(f'(h_T M^*(|\nabla u|^2))). \quad (4.19)$$

In figure 4.5, we show the results (for the same problem of figure 4.4) given by our ‘‘stabilized’’ functional, with the same parameter set. The computed surface energy, 3.30×10^4 is closer to the theoretical one than that computed with G_ε .

Remark The use of the filters M and M^* in the computation of w can be compared to the filtering used in [Sig97] for the stabilization of topology optimization algorithms.

Remark It is to notice that one can combine both formulation into one by setting

$$E_\varepsilon(u, \mathbf{T}) = \sum_{T \in \mathbf{T}} \frac{|T \cap \Omega|}{h_T} \left\{ (1 - \theta) f(h_T |\nabla u_T|^2) + \frac{\theta}{3} f(3h_T M_T^*(|\nabla u|^2)) \right\} \quad (4.20)$$

if $u \in V_\varepsilon(\Omega)$, $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_\varepsilon(u)$, and $E_\varepsilon(u, \mathbf{T}) = +\infty$ otherwise. (We then define $E_\varepsilon(u)$ as in (4.4).) The proof of the Γ -convergence of (4.20) to $G(u)$ is a simple adaption of the proof given for F_ε , since the sequence built in section 4.3.2 for the estimate from above of the Γ -limsup of F_ε also suited to G_ε (and thus to E_ε). With this third functional, one can, in essence, control the width of the regularization operator M_T .

This functional E_ε seems to give better results when used with a parameter θ close to 0.5 (i.e., when E_ε is ‘‘halfway’’ between G_ε and F_ε). In the following

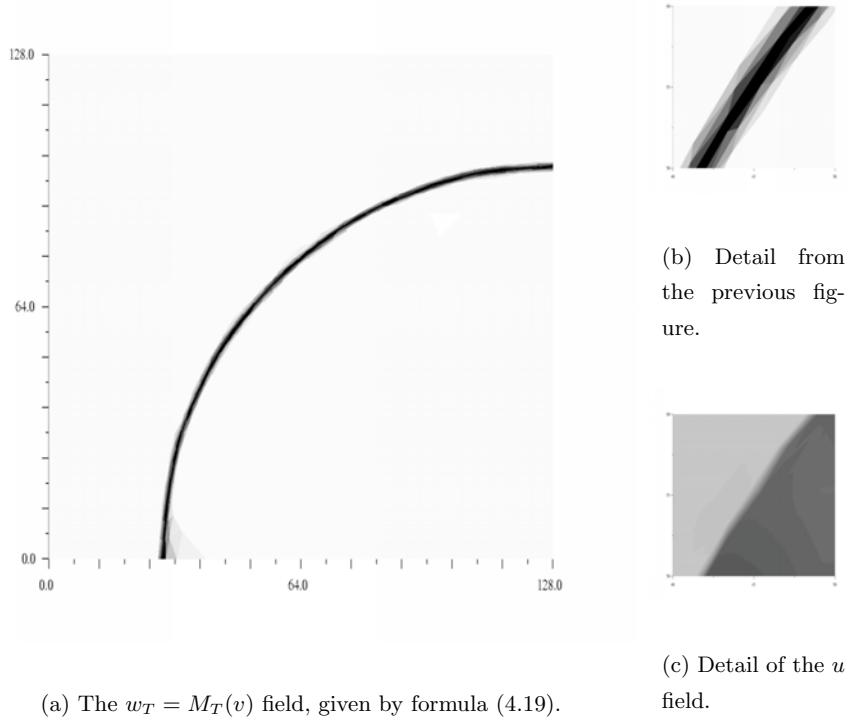


Figure 4.5: Segmentation of Figure 4.2(b) with the approximation F_ε .

table 4.1, we compare the values of the total energy $E_\varepsilon(u) + \beta \int_\Omega |u - g|^2 dx$ and of various other energies for different values of θ . The same computation has been made for various choices of the initial guess v_0 for v , respectively $v_0 \equiv 1$, v_0 randomly chosen in $[0.5, 1]$ and v_0 randomly chosen in $[0, 1]$. The problem is the segmentation of the image shown in Figure 4.2(b). The mesh is the same for all experiments, it is the mesh generated after three adaptions with $\theta = 1$. The idea is to test the sensitivity of the algorithm with respect to the initial values. In order to give an estimate of the length $\mathcal{H}^1(S_u)$ of the approximated solution we compute a “surface energy” as the sum of $|T|/h_T$ over all the triangles T where $h_T |\nabla u_T|^2 \geq \alpha$. This is exactly the surface energy that would be measured by energy G_ε in the case where $f(x) = \min(|x|, \alpha)$, and can be compared with the theoretical expected value $\alpha \times 50\pi \simeq 3.14 \times 10^4$. In every case, the stabilized

functional F_ε gives better results than the original one G_ε . By introducing a diffusion operator, we decreased the sensitiveness to the initial guess, without losing accuracy either on the surface energy or on the focalization of the edges. Functional E_ε is a good compromise between F_ε and G_ε since it can give a better approximation of the energies than F_ε (see the case $v_0 \equiv 1$), even if it is more sensitive on the initial guess (see the case $v_0 \in [0, 1]$).

v_0	θ	E_ε	Surface energy	$\beta \ u - g\ _{L^2(\Omega)}^2$	Total energy
$v_0 \equiv 1$	1.00	5.84×10^4	3.30×10^4	2.13×10^6	2.19×10^6
$v_0 \equiv 1$	0.75	5.97×10^4	3.34×10^4	2.13×10^6	2.18×10^6
$v_0 \equiv 1$	0.50	5.89×10^4	3.27×10^4	2.10×10^6	2.16×10^6
$v_0 \equiv 1$	0.25	6.20×10^4	3.65×10^4	2.14×10^6	2.20×10^6
$v_0 \equiv 1$	0.00	6.83×10^4	4.30×10^4	2.24×10^6	2.31×10^6
$v_0 \in [0.5, 1]$	1.00	5.86×10^4	3.24×10^4	2.14×10^6	2.19×10^6
$v_0 \in [0.5, 1]$	0.75	5.98×10^4	3.34×10^4	2.11×10^6	2.17×10^6
$v_0 \in [0.5, 1]$	0.50	5.86×10^4	3.24×10^4	2.10×10^6	2.16×10^6
$v_0 \in [0.5, 1]$	0.25	6.87×10^4	4.18×10^4	2.15×10^6	2.22×10^6
$v_0 \in [0.5, 1]$	0.00	6.72×10^4	4.15×10^4	2.22×10^6	2.29×10^6
$v_0 \in [0, 1]$	1.00	6.13×10^4	3.62×10^4	2.15×10^6	2.21×10^6
$v_0 \in [0, 1]$	0.75	6.08×10^4	3.41×10^4	2.16×10^6	2.23×10^6
$v_0 \in [0, 1]$	0.50	6.23×10^4	3.62×10^4	2.19×10^6	2.25×10^6
$v_0 \in [0, 1]$	0.25	6.53×10^4	3.97×10^4	2.19×10^6	2.25×10^6
$v_0 \in [0, 1]$	0.00	7.52×10^4	4.82×10^4	2.28×10^6	2.36×10^6

Table 4.1: Computed energies for various choices of v_0

The last example is the segmentation of a “T junction” with 20 percent of additive noise, shown in Figure 4.6(a). To adapt the mesh at the junction is difficult: if the anisotropy ratio is high, the set of “flat” elements cannot be curved enough so as to follow the edge while a smaller ratio prevents a good approximation of the surface energy. An improvement to the way we adapt the mesh would then be to add in some way the local curvature of the edge set. The first and last mesh are shown in Figure 4.6(b) and 4.6(c). The segmented image and its edge set are in Figure 4.7(a) and 4.7(b). The parameters are $\alpha = 75$,

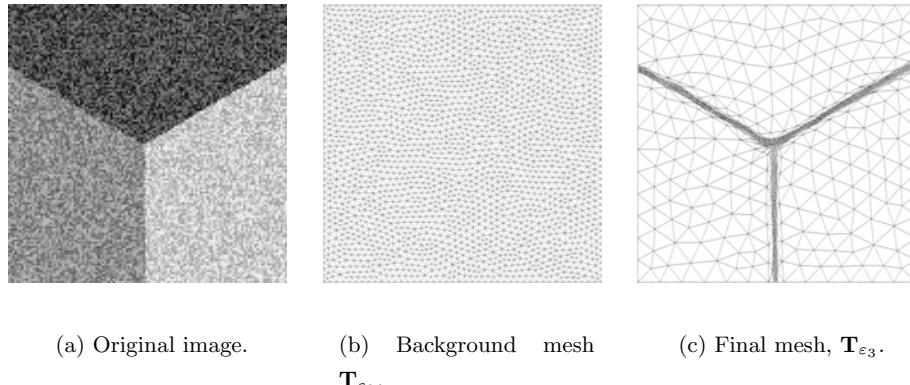


Figure 4.6: Illustration of the mesh adaption process.

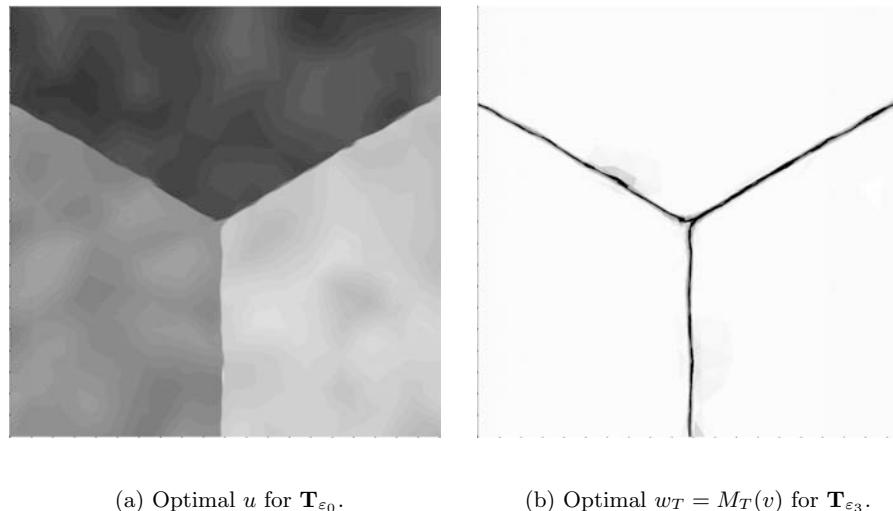


Figure 4.7: The segmented image and its jump set.

$\beta = 0.075$, $\theta = 0.5$; and the successive values of h_1 and h_2 are $(1,5)$, $(0.75,3.75)$, $(0.5,3.75)$, close to the edges and $(10,10)$, $(7.5,7.5)$, $(10,10)$ far from the edges.

The next section is devoted to the mathematical proofs of the convergence results.

4.3 Proof of the convergence results

In sections 4.3.1 and 4.3.2 we first show Theorem 1. We will show, in a standard way, that the Γ -liminf F' of F_ε satisfies $F' \geq F$, while the Γ -limsup F'' is less than F . Then, in section 4.3.3, we deduce Theorem 2.

4.3.1 Estimate from below of the Γ -liminf

For every open set $A \subseteq \Omega$ and every $\varepsilon > 0$, we define

$$F_\varepsilon(u, \mathbf{T}, A) = \begin{cases} \sum_{T \in \mathbf{T}} |T \cap A| \frac{1}{h_T} f(h_T M_T^*(|\nabla u|^2)), & \text{if } u \in V_\varepsilon(\Omega), \mathbf{T} \in \mathcal{T}_\varepsilon(u), \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4.21)$$

and we let $F_\varepsilon(u, A) = \inf_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_\varepsilon(u)} F_\varepsilon(u, \mathbf{T}, A)$. We choose a sequence $(\varepsilon_j)_{j \geq 1}$ with $\varepsilon_j \downarrow 0$ as $j \rightarrow \infty$, and set for every $u \in L^p(\Omega)$ and every open set A

$$F'(u, A) = \Gamma - \liminf_{j \rightarrow \infty} F_{\varepsilon_j}(u, A).$$

In order to prove that $F'(u, \Omega)$ is finite if and only if $u \in L^p(\Omega) \cap GSBV(\Omega)$, and that in this case

$$F'(u, \Omega) \geq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + 3f_\infty \mathcal{H}^1(S_u), \quad (4.22)$$

we will use the same localization technique as in [AT90][BD96][CD98]. The result will be a consequence of the following lemma.

Lemma 1. *Let $A \subseteq \Omega$ be an open set and $u \in L^p(\Omega)$, and assume $F'(u, A) < +\infty$. Then, $u \in GSBV(A)$ and*

$$F'(u, A) \geq \int_A |\nabla u(x)|^2 dx, \quad (4.23)$$

$$F'(u, A) \geq 3f_\infty \mathcal{H}^1(A \cap S_u). \quad (4.24)$$

Arguing for instance as in [BD96, Prop. 6.5], we immediately deduce inequality (4.22) from Lemma 1, since it can easily be shown that given $u \in L^p(\Omega)$, the set functions $A \mapsto F'(u, A)$ are increasing and superadditive.

Proof of (4.23)

Choose an open set $A \subseteq \Omega$ and a sequence $(u^{\varepsilon_j}, \mathbf{T}^{\varepsilon_j})$ such that $u^{\varepsilon_j} \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$ and $\liminf_{j \rightarrow \infty} F_{\varepsilon_j}(u^{\varepsilon_j}, \mathbf{T}^{\varepsilon_j}, A) < +\infty$. For simplicity's sake we will drop the subscript j and write $\varepsilon \downarrow 0$ instead of $j \rightarrow \infty$. We fix a positive constant κ , and write, taking into account the fact that f is nondecreasing,

$$F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A) \geq \sum_{T \subset A} \frac{|T|}{h_T} f\left(h_T M_T^*\left(|\nabla u^\varepsilon|^2 \wedge \frac{\kappa}{\varepsilon}\right)\right). \quad (4.25)$$

For every $T \in \mathbf{T}^\varepsilon$, we have the following estimates:

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin \theta_0 \leq |T| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}c^2\varepsilon^2, \quad (4.26)$$

and

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 2\theta_0 \leq S_T \leq \pi \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 c^2\varepsilon^2 \quad (4.27)$$

as soon as T or some T' with $T' \cap T \neq \emptyset$ is included in Ω ; moreover,

$$\varepsilon \sin \theta_0 \leq h_T \leq \frac{\sqrt{3}}{2}c\varepsilon. \quad (4.28)$$

In particular, if $T \subset A \subseteq \Omega$,

$$M_T^*\left(|\nabla u^\varepsilon|^2 \wedge \frac{\kappa}{\varepsilon}\right) \leq \frac{1}{S_T} \sum_{T' \cap T \neq \emptyset} \frac{S_T}{S_{T'}} |T' \cap \Omega| \frac{\kappa}{\varepsilon} \leq \frac{2\pi c^2}{\sin 2\theta_0} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \frac{\kappa}{\varepsilon},$$

so that there exists some constant K depending only on θ_0, c such that

$$h_T M_T^*\left(|\nabla u^\varepsilon|^2 \wedge \frac{\kappa}{\varepsilon}\right) \leq K\kappa. \quad (4.29)$$

Let $b_\kappa = \inf_{0 < t \leq K\kappa} f(t)/t$, by (4.1) we know that $b_\kappa \rightarrow 1$ as κ goes to zero, and from (4.25), (4.29) we get

$$F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A) \geq b_\kappa \sum_{T \subset A} |T| M_T^*\left(|\nabla u^\varepsilon|^2 \wedge \frac{\kappa}{\varepsilon}\right). \quad (4.30)$$

Let now \mathbf{T}_A^ε be the set of all triangles $T \in \mathbf{T}^\varepsilon$ such that every triangle $T' \in \mathbf{T}^\varepsilon$, $T' \cap T \neq \emptyset$, lies in A . We have from (4.30)

$$F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A) \geq b_\kappa \sum_{T \subset A} |T| \sum_{T' \cap T \neq \emptyset} \frac{|T' \cap \Omega|}{S_{T'}} \left(|\nabla u_{T'}^\varepsilon|^2 \wedge \frac{\kappa}{\varepsilon}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= b_\kappa \sum_{T' \in \mathbf{T}^\varepsilon} |T' \cap \Omega| \left(|\nabla u_{T'}^\varepsilon|^2 \wedge \frac{\kappa}{\varepsilon} \right) \frac{1}{S_{T'}} \sum_{T \cap T' \neq \emptyset, T \subset A} |T| \geq \\
&\geq b_\kappa \sum_{T' \in \mathbf{T}_A^\varepsilon} |T'| \left(|\nabla u_{T'}^\varepsilon|^2 \wedge \frac{\kappa}{\varepsilon} \right) \frac{1}{S_{T'}} \sum_{T \cap T' \neq \emptyset} |T| = b_\kappa \sum_{T \in \mathbf{T}_A^\varepsilon} |T| \left(|\nabla u_T^\varepsilon|^2 \wedge \frac{\kappa}{\varepsilon} \right),
\end{aligned}$$

so that, letting $\mathbf{T}_\kappa^\varepsilon = \{T \in \mathbf{T}^\varepsilon : |\nabla u_T^\varepsilon|^2 > \kappa/\varepsilon\}$,

$$F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A) \geq b_\kappa \sum_{T \in \mathbf{T}_A^\varepsilon \setminus \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon} |T| |\nabla u_T^\varepsilon|^2 + b_\kappa \kappa \sum_{T \in \mathbf{T}_A^\varepsilon \cap \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon} \frac{|T|}{\varepsilon} \quad (4.31)$$

Let $A(\varepsilon) = \bigcup_{T \in \mathbf{T}_A^\varepsilon \cap \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon} T \subset A$ and set $v^\varepsilon(x) = (1 - \chi_{A(\varepsilon)}(x))u^\varepsilon(x)$ for all $x \in \Omega$. We can assume that $u^\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$ for almost every $x \in \Omega$ as $\varepsilon \downarrow 0$. Since by (4.31), $|A(\varepsilon)| \leq (F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A)/b_\kappa \kappa)\varepsilon$, we can also assume (up to a subsequence) that $\chi_{A(\varepsilon)}(x) \rightarrow 0$ for almost every $x \in \Omega$. Then, $v^\varepsilon \rightarrow u$ a.e. in Ω . The function v^ε belongs to $SBV(\Omega)$, and its jumps set satisfies $S_{v^\varepsilon} \subseteq \bigcup_{T \in \mathbf{T}_A^\varepsilon \cap \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon} \partial T$. Since for any $T \in \mathbf{T}^\varepsilon$,

$$\mathcal{H}^1(\partial T) \leq 6 \frac{|T|}{h_T} \leq \frac{6}{\sin \theta_0} \frac{|T|}{\varepsilon}, \quad (4.32)$$

we deduce from (4.31) that

$$\mathcal{H}^1(S_{v^\varepsilon}) \leq \frac{6}{b_\kappa \kappa \sin \theta_0} F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A), \quad (4.33)$$

and is thus bounded. If we fix now $\delta > 0$ and let $A^\delta = \{x \in A : \text{dist}(x, A) > \delta\}$, it is clear that if ε is small enough, $A^\delta \subseteq \bigcup_{T \in \mathbf{T}_A^\varepsilon} T$, so that we also have from (4.31)

$$b_\kappa \int_{A^\delta} |\nabla v^\varepsilon(x)|^2 dx \leq F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A). \quad (4.34)$$

Since $\|v^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}$ is also bounded, we can invoke Ambrosio's Theorem 3 to conclude that $u \in GSBV(A^\delta)$, with

$$\mathcal{H}^1(S_u \cap A^\delta) \leq \frac{6}{b_\kappa \kappa \sin \theta_0} \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A),$$

and

$$b_\kappa \int_{A^\delta} |\nabla u(x)|^2 dx \leq \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A). \quad (4.35)$$

Sending δ to zero, we deduce that $u \in GSBV(A)$, with $\mathcal{H}^1(S_u \cap A) < +\infty$, and sending then κ to zero in (4.35) we get

$$\int_A |\nabla u(x)|^2 dx \leq \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A). \quad (4.36)$$

Since the sequence $(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon)$ was arbitrary, we deduce (4.23). \square

Proof of (4.24)

The proof of inequality (4.24) is similar. We choose again A , u^ε , \mathbf{T}^ε as in the previous section. \mathbf{T}_A^ε and $\mathbf{T}_\kappa^\varepsilon$ are defined in the same way, and we also let $\widehat{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon \supset \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon$ be the set of triangles $T \in \mathbf{T}^\varepsilon$ such that some $T' \in \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon$ satisfies $T' \cap T \neq \emptyset$. We now define $\tilde{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon$ as the set of triangles $T \in \mathbf{T}^\varepsilon$ such that, along at least two edges of T , the slope of u^ε is (strictly) greater than $\sqrt{\frac{\kappa}{\varepsilon}}$. Clearly, for such a triangle, $|\nabla u_T^\varepsilon|^2 > \frac{\kappa}{\varepsilon}$, so that $\tilde{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon \subset \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon \subset \widehat{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon$. If $T \in \widehat{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon$, and if for all T' , $T' \cap T \neq \emptyset \Rightarrow T' \subset \Omega$, we have, using (4.26), (4.27) and (4.28),

$$h_T M_T^*(|\nabla u^\varepsilon|^2) \geq \frac{\sin \theta_0 \sin 2\theta_0}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \frac{\kappa}{2\pi c^2} = K'\kappa,$$

so that, for such a T ,

$$f(h_T M_T^*(|\nabla u^\varepsilon|^2)) \geq a_\kappa$$

for some constant $a_\kappa = f(K'\kappa)$ that goes to f_∞ as κ goes to infinity. Thus,

$$F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A) \geq a_\kappa \sum_{T \in \tilde{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon \cap \mathbf{T}_A^\varepsilon} \frac{|T|}{h_T} \quad (4.37)$$

In the same way as in the previous section, we let

$$B(\varepsilon) = \bigcup_{T \in \mathbf{T}_A^\varepsilon \cap \tilde{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon} T \quad \text{and} \quad w^\varepsilon(x) = (1 - \chi_{B(\varepsilon)}(x))u^\varepsilon(x),$$

$$D(\varepsilon) = \bigcup_{T \in \mathbf{T}_A^\varepsilon \cap \widehat{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon} T \quad \text{and} \quad r^\varepsilon(x) = (1 - \chi_{D(\varepsilon)}(x))u^\varepsilon(x).$$

We also let $C(\varepsilon)$ be the union of all the triangles in $\mathbf{T}_A^\varepsilon \cap \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon$, plus the triangles in $\mathbf{T}_A^\varepsilon \cap \widehat{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon \setminus \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon$ that have at least two edges that belong to triangles of $\mathbf{T}_\kappa^\varepsilon$. This set $C(\varepsilon)$ is thus slightly larger than the set $A(\varepsilon)$ of the previous section. We let $q^\varepsilon(x) = (1 - \chi_{C(\varepsilon)}(x))u^\varepsilon(x)$ for all $x \in \Omega$. We have $B(\varepsilon) \subset C(\varepsilon) \subset D(\varepsilon)$ and by (4.37), $|D(\varepsilon)| \rightarrow 0$ as $\varepsilon \downarrow 0$, so that we may assume that w^ε , q^ε and r^ε go to u a.e. in Ω .

If $T \notin \tilde{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon$, the slope of u^ε along at least two edges of T is less than $\sqrt{\frac{\kappa}{\varepsilon}}$, so that it is not difficult to check (see [CD98, Remark 3.5]) that

$$|\nabla u_T^\varepsilon|^2 \leq \frac{5}{\sin \theta_0} \frac{\kappa}{\varepsilon}.$$

Letting $\kappa' = 5\kappa/\sin\theta_0$, we deduce, as in the previous section, that for any $\delta > 0$ and ε small enough,

$$b_{\kappa'} \int_{A^\delta} |\nabla w^\varepsilon(x)|^2 dx \leq F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A) \quad (4.38)$$

for some constant $b_{\kappa'} > 0$ (not depending on δ nor ε), and obviously the same inequality holds for q^ε and r^ε .

We now estimate the length of $\partial B(\varepsilon) \cap A^\delta$, $\partial C(\varepsilon) \cap A^\delta$ and $\partial D(\varepsilon) \cap A^\delta$, for ε small enough.

Consider first a triangle $T \in \tilde{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon$. If (part of) an edge L of T belongs to $\partial B(\varepsilon) \cap A^\delta$, then, if the slope of u^ε along L is smaller than $\sqrt{\frac{\kappa}{\varepsilon}}$, we use the estimate $\mathcal{H}^1(L) \leq 2|T|/h_T$, otherwise, L is the edge common to T and another triangle T' such that $T' \notin \tilde{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon$, but since the slope of u^ε along L is larger than $\sqrt{\frac{\kappa}{\varepsilon}}$, $T' \in \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon$, and we estimate $\mathcal{H}^1(L) \leq 2|T'|/h_{T'}$. Since the first case occurs for at most one edge of T (by definition of $\tilde{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon$), and since the triangle T' in the second case can only be considered once (otherwise the slope of u^ε along at least two edges of T' would be larger than $\sqrt{\frac{\kappa}{\varepsilon}}$ and we would have $T' \in \tilde{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon$), we conclude that (if ε is small enough, so that $T \cap A^\delta \neq \emptyset \Rightarrow T \in \mathbf{T}_A^\varepsilon$)

$$\mathcal{H}^1(\partial B(\varepsilon) \cap A^\delta) \leq 2 \sum_{T \in \mathbf{T}_A^\varepsilon \cap \mathbf{T}_k^\varepsilon} \frac{|T|}{h_T}. \quad (4.39)$$

Consider now an edge L which is part of the boundary of $C(\varepsilon)$ (inside A^δ). Then, there are two possible cases:

- i. L is the edge of a triangle $T \subset C(\varepsilon)$, $T \in \hat{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon \setminus \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon$, and each of the two other edges of T is the edge of another triangle that belongs to $\mathbf{T}_\kappa^\varepsilon$. In this case we estimate the length of L with $2|T|/h_T$, and the two other edges of T are inside $C(\varepsilon)$ so that they can not be part of the boundary of neither $C(\varepsilon)$ nor $D(\varepsilon)$.
- ii. L is an edge common to a triangle $T \in \hat{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon \setminus \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon$ and a triangle $T' \in \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon$, with therefore $T' \subset C(\varepsilon)$ and $\hat{T} \cap C(\varepsilon) = \emptyset$. In this case, the two other edges of T can not be on the boundary of $D(\varepsilon)$ (since they share a vertex with T' and thus each one is common to T and another triangle of $\hat{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon$), and can not either be common to T and another triangle of $\mathbf{T}_\kappa^\varepsilon$, otherwise, by definition of $C(\varepsilon)$, we would have $T \cup T' \subset C(\varepsilon)$ and L would not be

on the boundary. Therefore, if one of these edges is part of the boundary of $C(\varepsilon)$, it must enter the previous case (*i*) and its length can already be estimated by the surface of the adjacent triangle included in $C(\varepsilon)$. We estimate $\mathcal{H}^1(L) \leq 2|T|/h_T$.

We deduce that $\mathcal{H}^1(\partial C(\varepsilon) \cap A^\delta)$ can be bounded by a sum $2\sum_T |T|/h_T$ that is taken on triangles T of $\widehat{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon \setminus \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon$ such that none of the three edges of T coincides with some part of $\partial D(\varepsilon)$ (or, more precisely, such that $\mathcal{H}^1(\partial T \cap \partial D(\varepsilon) \cap A^\delta) = 0$).

On the other hand, if L is the edge of some triangle $T \in \widehat{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon \setminus \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon$ such that (part of) L belongs to the boundary of $D(\varepsilon)$, we easily show that the two other edges of T are not part of $\partial D(\varepsilon) \cap A^\delta$. Indeed, if $T = [x, y, z]$ with $L = [x, y]$, then z must also be a vertex of some triangle of \mathbf{T}_k^ε (otherwise it would be the case for either x or y and L could not be on the boundary of $D(\varepsilon)$), therefore neither $[x, z]$ nor $[y, z]$ can be on the boundary of $D(\varepsilon)$ (nor on the boundary of $C(\varepsilon)$, in fact). We still estimate $\mathcal{H}^1(L) \leq 2|T|/h_T$. We deduce, if ε is small enough, that

$$\mathcal{H}^1(\partial C(\varepsilon) \cap A^\delta) + \mathcal{H}^1(\partial D(\varepsilon) \cap A^\delta) \leq 2 \sum_{T \in \mathbf{T}_A^\varepsilon \cap \widehat{\mathbf{T}}_\kappa^\varepsilon \setminus \mathbf{T}_\kappa^\varepsilon} \frac{|T|}{h_T}. \quad (4.40)$$

Thus, with (4.37), (4.39) and (4.40),

$$F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A) \geq \frac{a_\kappa}{2} \left\{ \mathcal{H}^1(\partial B(\varepsilon) \cap A^\delta) + \mathcal{H}^1(\partial C(\varepsilon) \cap A^\delta) + \mathcal{H}^1(\partial D(\varepsilon) \cap A^\delta) \right\}. \quad (4.41)$$

Since $\|w^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \|q^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \|r^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}$, which is uniformly bounded, we may invoke Lemma 2 (see Appendix 4.3.3) to get that

$$\mathcal{H}^1(S_u \cap A^\delta) \leq \frac{1}{2} \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{H}^1(\partial X(\varepsilon) \cap A^\delta),$$

where $X(\varepsilon)$ is anyone of the sets $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$ or $D(\varepsilon)$. We conclude from (4.41) that

$$3a_\kappa \mathcal{H}^1(S_u \cap A^\delta) \leq \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A).$$

Sending δ to zero, and then κ to infinity, we deduce

$$3f_\infty \mathcal{H}^1(S_u \cap A) \leq \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon, A), \quad (4.42)$$

and by the arbitrariness of the sequence $(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon)$ we get (4.24). The proof of Lemma 1 is thus achieved. \square

Remark Inequalities (4.36) and (4.42) were proved using only the assumptions that u^ε is bounded in $L^p(\Omega)$ and that it goes to u a.e. in Ω . They still hold if u^ε does not converge strongly to u , but only weakly in $L^p(\Omega)$, and satisfy these assumptions. We deduce that, in the same way as (4.22) is deduced from (4.23) and (4.24), $u \in GSBV(\Omega)$ and

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + 3f_\infty \mathcal{H}^1(S_u) \leq \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon) \quad (4.43)$$

as soon as u^ε is bounded in $L^1(\Omega)$ and goes to u a.e. in Ω . This will be useful in the proof of Theorem 2.

It remains to estimate the Γ -lim sup F'' of F_ε .

4.3.2 Estimate from above of the Γ -lim sup

We now wish to prove that for any $u \in L^p(\Omega)$, there exists $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converging to u in $L^p(\Omega)$ with

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon(u^\varepsilon) \leq F(u) \quad (4.44)$$

(more exactly, we should find for any sequence (ε_j) with $\varepsilon_j \downarrow 0$ as $j \rightarrow \infty$ a sequence $(u^{\varepsilon_j})_{j \geq 1}$ with $\limsup_{j \rightarrow \infty} F^{\varepsilon_j}(u^{\varepsilon_j}) \leq F(u)$).

Arguing like in [Cor97], where the approximation result of Dibos and Séré [DS97] (see Appendix 4.3.3) is generalized, we can find, given any $u \in L^p(\Omega)$ with $F(u) < +\infty$, a sequence $(u_n)_{n \geq 1}$ of bounded functions such that

- each u^n is defined on some $\Omega'_n \supset \Omega$;
- for every n , there exist disjoint closed segments L_i^n , $i = 1, \dots, N_n$, such that $u_n \in W^{2,\infty}(\Omega'_n \setminus \cup_{i=1}^{N_n} L_i^n)$;
- for every n , $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$;
- as n goes to infinity, $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$ and

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 dx + 3f_\infty \sum_{i=1}^{N_n} \mathcal{H}^1(L_i^n) \leq F(u).$$

The assumption that $\partial\Omega$ is Lipschitz is crucial in order to establish the existence of the functions u_n in a larger domain Ω'_n . Now, by a standard diagonalization

argument, if for each n we find a sequence $(u_n^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, converging to u_n in $L^p(\Omega)$ as ε goes to zero, such that

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon(u_n^\varepsilon) \leq \int_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 dx + 3f_\infty \sum_{i=1}^{N_n} \mathcal{H}^1(L_i^n) \quad (4.45)$$

then we will be able to build the sequence (u^ε) satisfying (4.44).

We fix $n \geq 1$ and now describe how to build the sequence $(u_n^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. In order to simplify the notations we will drop all subscripts (superscripts) n . The function u is thus a piecewise regular function, defined on an open domain $\Omega' \supset \Omega$, and such that there exist N disjoint closed segments $(L_i)_{i=1}^N$ with $u \in W^{2,\infty}(\Omega' \setminus \cup_{i=1}^N L_i)$.

The construction we use in order to build the sequence $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ satisfying (4.45) is almost identical to the construction in [CD98, Appendix], so that we will not enter too much into the details. The idea is to build and connect together local triangulations designed around each discontinuity L_i , in such a way that the energy F_ε around L_i gives a good estimate of $3f_\infty \mathcal{H}^1(L_i)$, as ε goes to zero. This is obtained by recovering L_i with a strip of “minimal” triangles, i.e., triangles with two edges of length ε and one of length $\varepsilon' = 2\varepsilon \cos \theta_0$, as shown in Figure 4.8. Then, these triangulations are connected in some way to a uniform “background triangulation” (made of the squares $[k\varepsilon', (k+1)\varepsilon'] \times [l\varepsilon', (l+1)\varepsilon']$, $k, l \in \mathbf{Z}$, cut into two triangles along a diagonal), in order to obtain a global triangulation \mathbf{T}^ε over all Ω .

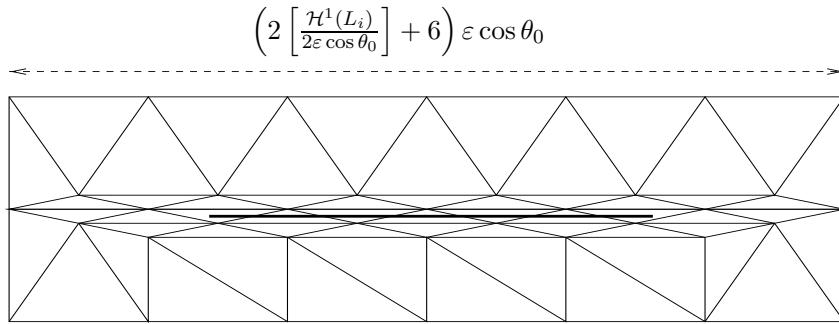


Figure 4.8: Each discontinuity L_i (thick line) is covered by a strip of $6N_i + 13$ “minimal” triangles ($N_i = [\mathcal{H}^1(L_i)/\varepsilon']$), the whole strip is included in a rectangle whose external nodes have to be connected to a “background triangulation”.

Let us give some details about this construction. Calling \mathbf{T}_i^ε the union of all triangles that touch L_i and $\widehat{\mathbf{T}}_i^\varepsilon$ the union of all triangles T such that either T or some neighbor of T (i.e., a triangle T' with $T' \cap T \neq \emptyset$) touches L_i , we want to design this strip in such a way that

$$\sum_{T \in \widehat{\mathbf{T}}_i^\varepsilon} \frac{|T|}{h_T} \sim 3\mathcal{H}^1(L_i)$$

as ε goes to zero. Figure 4.8 shows how to do this: it suffices to include L_i first in $2N_i + 5$ minimal triangles, with $N_i = [\mathcal{H}^1(L_i)/\varepsilon']$ ($[\cdot]$ denoting the integer part), and then juxtapose along this thin strip two other strips in such a way that the height h_T of each triangle in $\widehat{\mathbf{T}}_i^\varepsilon$ is perpendicular to L_i . For this particular construction, $\#\widehat{\mathbf{T}}_i^\varepsilon = 6N_i + 13$, and, since for every $T \in \widehat{\mathbf{T}}_i^\varepsilon$, $|T|/h_T = \varepsilon \cos \theta_0 = \varepsilon'/2$, we have

$$3\mathcal{H}^1(L_i) + 7\varepsilon \cos \theta_0 \leq \sum_{T \in \widehat{\mathbf{T}}_i^\varepsilon} \frac{|T|}{h_T} \leq 3\mathcal{H}^1(L_i) + 13\varepsilon \cos \theta_0. \quad (4.46)$$

The strip $\widehat{\mathbf{T}}_i^\varepsilon$ is then included into a larger rectangle of size $2\varepsilon' \times (\mathbf{N}_i + 3)\varepsilon'$. The algorithm described in [CD98] shows that it is always possible to connect the rectangle of Figure 4.8 to the background triangulation, provided $\varepsilon \ll \min_{i \neq j} \text{dist}(L_i, L_j) > 0$ (so that for $i \neq j$, $\widehat{\mathbf{T}}_i^\varepsilon$ and $\widehat{\mathbf{T}}_j^\varepsilon$ are not too close), θ_0 is not too large, and c is not too small ($\theta_0 \leq 18^\circ$ and $c \geq 6$ suit).

Now, \mathbf{T}^ε being constructed, we simply let u^ε be the piecewise constant function equal to u at each node of \mathbf{T}^ε (including the vertices that are not in Ω of triangles that meet Ω without being included in it — we assume ε is small enough, so that each triangle $T \in \mathbf{T}^\varepsilon$ with $|T \cap \Omega| > 0$ is contained in Ω'). It is a classical fact that u^ε converges to u in $L^p(\Omega)$ as $\varepsilon \downarrow 0$. Let $\mathbf{T}_S^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^N \mathbf{T}_i^\varepsilon$ and $\widehat{\mathbf{T}}_S^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^N \widehat{\mathbf{T}}_i^\varepsilon$, we have, using (4.2) and (4.46),

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon) &\leq \sum_{T \in \mathbf{T}^\varepsilon} \frac{|T \cap \Omega|}{h_T} (h_T M_T^*(|\nabla u^\varepsilon|^2) \wedge f_\infty) \\ &\leq \sum_{T \in \mathbf{T}^\varepsilon \setminus \widehat{\mathbf{T}}_S^\varepsilon} |T \cap \Omega| M_T^*(|\nabla u^\varepsilon|^2) + 3f_\infty \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^1(L_i) + 13N f_\infty \varepsilon \cos \theta_0, \end{aligned} \quad (4.47)$$

We write the first sum in the last line of (4.47) as follows:

$$\sum_{T \in \mathbf{T}^\varepsilon \setminus \widehat{\mathbf{T}}_S^\varepsilon} |T \cap \Omega| M_T^*(|\nabla u^\varepsilon|^2) = \sum_{T \in \mathbf{T}^\varepsilon \setminus \widehat{\mathbf{T}}_S^\varepsilon} |T \cap \Omega| \sum_{T' \cap T \neq \emptyset} \frac{|T' \cap \Omega|}{S_{T'}} |\nabla u_{T'}^\varepsilon|^2 =$$

$$= \sum_{T' \in \mathbf{T}^\varepsilon} |T' \cap \Omega| |\nabla u_{T'}^\varepsilon|^2 \left\{ \frac{1}{S_{T'}} \sum_{T \cap \mathbf{T}' \neq \emptyset, T \notin \hat{\mathbf{T}}_S^\varepsilon} |T \cap \Omega| \right\}.$$

Since the last term in the parentheses is always less than 1, and is zero as soon as $T \in \mathbf{T}_S^\varepsilon$, we deduce

$$F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon) \leq \sum_{T \in \mathbf{T}^\varepsilon \setminus \mathbf{T}_S^\varepsilon} |T \cap \Omega| |\nabla u_T^\varepsilon|^2 + 3f_\infty \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^1(L_i) + 13Nf_\infty \varepsilon \cos \theta_0. \quad (4.48)$$

Again, we proceed now as in [CD98]: using [RT83, Thm 4.4-3], we have for any $T \notin \mathbf{T}_S^\varepsilon$,

$$\|u - u^\varepsilon\|_{H^1(T)} \leq c(\theta_0) \varepsilon \|D^2 u\|_{L^2(T, \mathbf{R}^4)}$$

where $c(\theta_0) > 0$ is some constant (depending only on θ_0) and $D^2 u$ is the Hessian of u , so that, if we let

$$U^\varepsilon(x) = \sum_{T \in \mathbf{T}^\varepsilon \setminus \mathbf{T}_S^\varepsilon} \nabla u_T^\varepsilon \cdot \chi_T(x)$$

for all $x \in \Omega$,

$$\|\nabla u - U^\varepsilon\|_{L^2(\Omega, \mathbf{R}^2)}^2 \leq c(\theta_0)^2 \varepsilon^2 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega, \mathbf{R}^4)}^2 + \int_{A(\varepsilon)} |\nabla u(x)|^2 dx$$

where $A(\varepsilon) = \bigcup_{T \in \mathbf{T}_S^\varepsilon} T$ satisfies $|A(\varepsilon)| \rightarrow 0$ as $\varepsilon \downarrow 0$. Thus, U^ε goes to ∇u strongly in $L^2(\Omega, \mathbf{R}^2)$, and sending ε to zero in (4.48) we get (4.45). The proof of Theorem 1 is thus achieved. \square

Remark If the function u is bounded, we notice that the functions u^ε that we build satisfy $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ for every $\varepsilon > 0$. In particular, we deduce that the functionals F^ε Γ -converge to F as $\varepsilon \downarrow 0$ also in the space

$$\{u \in L^p(\Omega) : \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M\}$$

for any $M > 0$.

4.3.3 Proof of Theorem 2

We consider $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ satisfying the assumptions of Theorem 2, and for each ε an adapted triangulation \mathbf{T}^ε such that $F_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon) = F_\varepsilon(u^\varepsilon)$. Like in section 4.3.1 we fix $\kappa > 0$ and introduce a set $\mathbf{T}_\kappa^\varepsilon = \{T \in \mathbf{T}^\varepsilon : |\nabla u_T^\varepsilon|^2 > \kappa/\varepsilon\}$. Following the proof in section 4.3.1 with $A = \Omega$, we can build functions $v^\varepsilon \in SBV(\Omega)$ such that for every $\varepsilon > 0$, $\|v^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}$,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} |\{x \in \Omega : u^\varepsilon(x) \neq v^\varepsilon(x)\}| = 0 \quad (4.49)$$

and for every $\delta > 0$,

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\Omega^\delta} |\nabla v^\varepsilon(x)|^2 dx + \mathcal{H}^1(S_{v^\varepsilon} \cap \Omega^\delta) < +\infty.$$

We can thus invoke Ambrosio's Theorem 3, and follow a diagonal procedure in order to build a function $u \in GSBV(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ and a subsequence v^{ε_j} such that $v^{\varepsilon_j} \rightarrow u$ a.e. in Ω . From (4.49) we deduce, possibly extracting another subsequence, that u^{ε_j} goes to u a.e. in Ω . The Remark at the end of section 4.3.1 yields (4.10).

Assume now that for each $\varepsilon > 0$, the function u^ε is a solution of (4.11). For any $w \in L^p(\Omega)$ we proved in section 4.3.2 that we can build a sequence $(w^{\varepsilon_j})_{j \geq 1}$ converging to w in $L^p(\Omega)$ such that

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} F_{\varepsilon_j}(w^{\varepsilon_j}) + \int_{\Omega} |w^{\varepsilon_j}(x) - g(x)|^p dx \leq F(w) + \int_{\Omega} |w(x) - g(x)|^p dx.$$

Since for every j , $F_{\varepsilon_j}(w^{\varepsilon_j}) + \int_{\Omega} |w^{\varepsilon_j} - g|^p dx \geq F_{\varepsilon_j}(u^{\varepsilon_j}) + \int_{\Omega} |u^{\varepsilon_j} - g|^p dx$, we deduce from (4.10) and Fatou's Lemma that

$$F(u) + \int_{\Omega} |u(x) - g(x)|^p dx \leq F(w) + \int_{\Omega} |w(x) - g(x)|^p dx,$$

hence u solves (4.12). Taking $w = u$, we also get that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{\varepsilon_j}(u^{\varepsilon_j}) + \int_{\Omega} |u^{\varepsilon_j}(x) - g(x)|^p dx = F(u) + \int_{\Omega} |u(x) - g(x)|^p dx,$$

which yields, if $p > 1$, the strong convergence of u^{ε_j} to u . \square

Remark If $g \in L^\infty(\Omega)$, it is standard that any solution u of (4.12) satisfies $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$. This might not be true for the approximated problem (4.11), however, the Remark at the end of section 4.3.2 shows that Theorem (2) still holds if we add in the minimization problems (4.11) and (4.12) the additional constraint $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$. In this case, u^{ε_j} converges strongly to u for any $p \in [1, +\infty)$.

A. Special functions of bounded variation

A.1 The spaces SBV and $GSBV$: definitions and main properties

In this section we define briefly the “special functions of bounded variation” and state a few properties. See for instance [Amb90] or [Amb89b] for further details. Given $\Omega \subseteq \mathbf{R}^N$ and $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ a measurable function, we first define the *approximate upper limit* of u at $x \in \Omega$ as

$$u_+(x) = \inf \left\{ t \in [-\infty, +\infty] : \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{|\{y : u(y) > t\} \cap B_\rho(x)|}{\rho^N} = 0 \right\},$$

where $B_\rho(x)$ is the ball of radius ρ centered at x and $|E|$ denotes the Lebesgue measure of the set E . The *approximate lower limit* $u_-(x)$ is defined in the same way (i.e., $u_-(x) = -(-u)_+(x)$). The set

$$S_u = \{x \in \Omega : u_-(x) < u_+(x)\},$$

is the set of essential discontinuities of u , it is a (Lebesgue-)negligible Borel set. If $x \notin S_u$, we say that u is *approximately continuous* at x and we write $\tilde{u}(x) = u_-(x) = u_+(x) = \text{ap lim}_{y \rightarrow x} u(y)$.

A function $u \in L^1(\Omega)$ is a *function of bounded variation* if its distributional derivative Du is a vector-valued measure with finite total variation in Ω (equivalently, if the partial distributional derivatives $D_i u$, $i = 1, \dots, N$, are real-valued measures with finite total variation in Ω). The space of functions of bounded variation is denoted by $BV(\Omega)$. For the general theory we refer to [EG92], [Fed69], [Giu84] and [Zie89]. If $u \in BV(\Omega)$, the set S_u is *countably* $(\mathcal{H}^{n-1}, N-1)$ -rectifiable, i.e,

$$S_u = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \cup \mathcal{N}$$

where $\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{N}) = 0$ and each K_i is a compact subset of a C^1 -hypersurface Γ_i . There exists a Borel function $\nu_u : S_u \rightarrow \S^{N-1}$ such that \mathcal{H}^{n-1} -a.e. in S_u the vector $\nu_u(x)$ is normal to S_u at x in the sense that it is normal to Γ_i if $x \in K_i$. For every $u, v \in BV(\Omega)$, we must therefore have $\nu_u = \pm \nu_v$ \mathcal{H}^{n-1} -a.e. in $S_u \cap S_v$.

For every $u \in BV(\Omega)$ the measure Du can be decomposed as follows:

$$Du = \nabla u(x)dx + (u_+ - u_-)\nu_u \mathcal{H}^{n-1} \llcorner S_u + Cu$$

where ∇u is the *approximate gradient* of u , defined a.e. in Ω by

$$\text{ap} \lim_{y \rightarrow x} \frac{u(y) - u(x) - \langle \nabla u(x), y - x \rangle}{|y - x|} = 0,$$

$\mathcal{H}^{n-1} \llcorner S_u$ is the restriction of the $N - 1$ dimensional Hausdorff measure to the set S_u , and Cu is the *Cantor part* of the measure Du , which is singular with respect to the Lebesgue measure and such that $|Cu|(E) = 0$ for any E with $\mathcal{H}^{n-1}(E) < +\infty$.

We say that a function $u \in BV(\Omega)$ is a *special function of bounded variation* if $Cu = 0$, which means that the singular part of the distributional derivative Du is concentrated on the jumps set S_u . We denote by $SBV(\Omega)$ the space of such functions. We also define the space $GSBV(\Omega)$ of *generalized SBV* functions as the set of all measurable functions $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ such that for any $\Omega' \subset \subset \Omega$ and any $k > 0$, $u^k = (-k \vee u) \wedge k \in SBV(\Omega')$ (where $X \wedge Y = \min(X, Y)$ and $X \vee Y = \max(X, Y)$).

If $u \in GSBV(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega)$, u has an approximate gradient a.e. in Ω , moreover, as $k \uparrow \infty$,

$$\nabla u^k \rightarrow \nabla u \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad \text{and} \quad |\nabla u^k| \uparrow |\nabla u| \quad \text{a.e. in } \Omega; \quad (4.50)$$

$$S_{u^k} \subseteq S_u, \quad \mathcal{H}^{n-1}(S_{u^k}) \rightarrow \mathcal{H}^{n-1}(S_u) \quad \text{and} \quad \nu_{u^k} = \nu_u \quad \mathcal{H}^{n-1}\text{-a.e. in } S_{u^k}. \quad (4.51)$$

Slicing. We consider now for $\xi \in \S^{N-1}$ the sets $\xi^\perp = \{x \in \mathbf{R}^N : \langle \xi, x \rangle = 0\}$ and for any $z \in \xi^\perp$, $\Omega_{z,\xi} = \{t \in \mathbf{R} : z + t\xi \in \Omega\}$. On $\Omega_{z,\xi}$ we define a function $u_{z,\xi} : \Omega_{z,\xi} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ by $u_{z,\xi}(s) = u(z + s\xi)$. If $u \in BV(\Omega)$, we have the

following classical representation (see for instance [Amb89a], [AT90]): for \mathcal{H}^{n-1} -a.e. $z \in \xi^\perp$, $u_{z,\xi} \in BV(\Omega_{z,\xi})$ and for any Borel set $B \subseteq \Omega$

$$\langle Du, \xi \rangle(B) = \int_{\xi^\perp} d\mathcal{H}^{n-1}(z) Du_{z,\xi}(B_{z,\xi})$$

where $B_{z,\xi}$ is defined in the same way as $\Omega_{z,\xi}$; conversely if $u_{z,\xi} \in BV(\Omega_{z,\xi})$ for at least N independent vectors $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ and \mathcal{H}^{n-1} -a.e. $z \in \xi^\perp$, and if

$$\int_{\xi^\perp} d\mathcal{H}^{n-1}(z) |Du_{z,\xi}|(\Omega_{z,\xi}) < +\infty$$

then $u \in BV(\Omega)$. Now (see [Amb89b], [Amb89a]), if $u \in SBV_{loc}(\Omega)$, then for almost every $z \in \xi^\perp$, $u_{z,\xi} \in SBV_{loc}(\Omega_{z,\xi})$ (the converse is true provided this property is satisfied for at least N independent vectors ξ and u has locally bounded variation), the approximate derivative satisfies

$$u'_{z,\xi}(s) = \langle \nabla u(z + s\xi), \xi \rangle$$

for a.e. $s \in \Omega_{z,\xi}$, moreover

$$S_{u_{z,\xi}} = \{s \in \Omega_{z,\xi} : z + s\xi \in S_u\},$$

and for all $s \in S_{u_{z,\xi}}$,

$$(u_{z,\xi})_\pm(s) = u_\pm(z + s\xi).$$

Eventually, for any Borel set $B \subseteq \Omega$

$$\int_{\xi^\perp} d\mathcal{H}^{n-1}(z) \mathcal{H}^0(B_{z,\xi} \cap S_{u_{z,\xi}}) = \int_B |\langle \nu_u(x), \xi \rangle| d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

Compactness. We finally mention two compactness result. The first one is the classical compactness and lower semi-continuity result proved in [Amb89a] (see also [Amb89b], [Amb90]). The lemma that follows is a variant that is useful in the proof of our Γ -convergence theorems.

Theorem 3 (Ambrosio). *Let Ω be an open subset of \mathbf{R}^N and let (u_j) be a sequence in $GSBV(\Omega)$. Suppose that there exist $p \in [1, \infty]$ and a constant C such that*

$$\int_{\Omega} |\nabla u_j|^2 dx + \mathcal{H}^{n-1}(S_{u_j}) + \|u_j\|_{L^p(\Omega)} \leq C < +\infty$$

for every j . Then there exist a subsequence (still denoted by (u_j)) and a function $u \in GSBV(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ such that

$$\begin{aligned} u_j(x) &\rightarrow u(x) \text{ a.e. in } \Omega, \\ \nabla u_j &\rightharpoonup \nabla u \text{ weakly in } L^2(\Omega, \mathbf{R}^N), \\ \mathcal{H}^{n-1}(S_u) &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{n-1}(S_{u_j}). \end{aligned}$$

Moreover

$$\int_{S_u} |\langle \nu_u, \xi \rangle| d\mathcal{H}^{n-1} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{S_{u_j}} |\langle \nu_{u_j}, \xi \rangle| d\mathcal{H}^{n-1}$$

for every $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Lemma 2. Let Ω be an open subset of \mathbf{R}^N , $p \in [1, +\infty]$, and let (A_j) be a sequence of open subsets of Ω and (u_j) a sequence of functions such that

- for all j , $u_j \in C(\Omega \setminus A_j) \cap H^1(\Omega \setminus \overline{A_j})$,
- $\sup_j \|u_j\|_{L^p(\Omega)} + \int_{\Omega} |\nabla u_j(x)|^2 dx < +\infty$,
- $\sup_j \mathcal{H}^{n-1}(\partial A_j) < +\infty$.
- $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j| = 0$.

Then there exist a subsequence (not relabelled) and a function $u \in GSBV(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ such that (each u_j being extended with the value zero in A_j)

$$\begin{aligned} u_j(x) &\rightarrow u(x) \text{ a.e. in } \Omega, \\ \nabla u_j &\rightharpoonup \nabla u \text{ weakly in } L^2(\Omega, \mathbf{R}^N), \\ \mathcal{H}^{n-1}(S_u) &\leq \frac{1}{2} \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial A_j \cap \Omega). \end{aligned}$$

Proof of the lemma. The only property to check is the inequality

$$\mathcal{H}^{n-1}(S_u) \leq \frac{1}{2} \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial A_j \cap \Omega), \quad (4.52)$$

since the other statements easily follow from Ambrosio's previous theorem.

We can assume $p = \infty$: indeed if we replace the functions and their limits by the truncations at any level $k > 0$, $u_j^k = (-k \vee u_j) \wedge k$ and $u^k = (-k \vee u) \wedge k$, and

if the result holds for the sequence (u_j^k) and the function u^k , then from (4.51) we'll deduce the general result.

We call $M = \sup_j \|u_j\|_{L^\infty(\Omega \setminus \overline{A_j})}$, and on each A_j we set $u_j \equiv M+1$ (the value of u_j inside A_j does not affect the limit).

Since u_j is continuous on $\Omega \setminus A_j$,

$$S_{u_j} \subseteq \{x \in \partial A_j : 0 < D^+(x, A_j), D^-(x, A_j) < 1\} = S_{\chi_{A_j}} \subseteq \partial A_j$$

where $D^+(x, A_j) = \limsup_{\rho \downarrow 0} |B(x, \rho) \cap A_j|/\omega_N \rho^N$ and $D^-(x, A_j) = \liminf_{\rho \downarrow 0} |B(x, \rho) \cap A_j|/\omega_N \rho^N \in [0, 1]$ are the N -dimensional upper and lower densities of A_j at x ; and for all $x \in S_{u_j}$, $(u_j)_+(x) = M+1$ and $(u_j)_-(x) \leq M$. We denote by $\partial^* A_j$ the set $S_{\chi_{A_j}}$.

We first choose $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ and an open set $B \subset \subset \Omega$, and we will show that

$$\int_{S_u \cap B} |\langle \nu_u, \xi \rangle| d\mathcal{H}^{n-1} \leq \frac{1}{2} \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* A_j \cap B). \quad (4.53)$$

For any $z \in \xi^\perp$ we denote by B^z the set $\{t \in \mathbf{R} : z + t\xi \in B\}$ and respectively by $u^z(t)$ and $u_j^z(t)$ the functions $u(z + t\xi)$ and $u_j(z + t\xi)$.

We have that

$$\int_B |u_j - u| dx = \int_{\xi^\perp} d\mathcal{H}^{n-1}(z) \int_{B^z} |u_j^z(t) - u^z(t)| dt \rightarrow 0$$

as $j \rightarrow \infty$, so that we may assume (up to a subsequence) that for \mathcal{H}^{n-1} -a.e. $z \in \xi^\perp$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{B^z} |u_j^z - u^z| dt = 0. \quad (4.54)$$

Moreover, for \mathcal{H}^{n-1} -a.e. $z \in \xi^\perp$,

$$\int_{B^z} |(u^z)'(t)|^2 dt + \mathcal{H}^0(S_{u^z}) < +\infty, \quad (4.55)$$

since

$$\int_{\xi^\perp} d\mathcal{H}^{n-1}(z) \left(\int_{B^z} |(u^z)'(t)|^2 dt + \mathcal{H}^0(S_{u^z}) \right) =$$

$$= \int_B |\langle \nabla u(x), \xi \rangle|^2 dx + \int_{S_u} |\langle \nu_u(x), \xi \rangle| d\mathcal{H}^{n-1}(z) < +\infty;$$

and

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{B^z} |(u_j^z)'(t)|^2 dt < +\infty, \quad (4.56)$$

since, by Fatou's lemma,

$$\int_{\xi^\perp} d\mathcal{H}^{n-1}(z) \left(\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{B^z} |(u_j^z)'(t)|^2 dt \right) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_B |\langle \nabla u_j(x), \xi \rangle|^2 dx < +\infty.$$

We also know that for \mathcal{H}^{n-1} -a.e. $z \in \xi^\perp$, the function u_j^z is in $SBV(B^z)$ with

$$S_{u_j^z} = \{t \in B^z : z + t\xi \in S_{u_j}\}$$

and $(u_j^z)_+(t) = M + 1$, $(u_j^z)_-(t) \leq M$ for any $t \in S_{u_j^z}$.

We may therefore choose a z such that this holds for all j , as well as (4.54), (4.55) and (4.56). By (4.55), the function u^z is piecewise continuous on B^z with a finite number of jumps. We let $S_{u^z} \cap B^z = \{t_1, \dots, t_n\}$, with $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Let $\varepsilon > 0$ be chosen such that $(t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon) \subset \subset B_z$ and $t_i + \varepsilon < t_{i+1} - \varepsilon$ for all i . We will show that for an infinity of indices j , each interval $(t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon)$ contains at least two jumps of u_j^z .

Consider a subsequence $(u_{j_k}^z)$ of (u_j^z) such that $u_{j_k}^z \rightarrow u^z$ a.e. on B^z ,

$$\ell = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B^z} |(u_{j_k}^z)'(t)|^2 dt = \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{B^z} |(u_j^z)'(t)|^2 dt < +\infty,$$

and

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^0(B^z \cap S_{u_{j_k}^z}) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}^0(B^z \cap S_{u_j^z}).$$

For every $i = 1, \dots, n$, let $\sigma_i = u_+^z(t_i) - u_-^z(t_i)$ and choose $\delta_i < \min(\varepsilon, \sigma_i^2/8\ell)$.

We choose α_i, β_i such that

- $t_i - \delta_i < \alpha_i < t_i < \beta_i < t_i + \delta_i$,
- $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{j_k}^z(\alpha_i) = u^z(\alpha_i)$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{j_k}^z(\beta_i) = u^z(\beta_i)$,
- and $|u^z(\beta_i) - u^z(\alpha_i)| > \frac{1}{2}\sigma_i$ (by continuity).

For k large enough, $S_{u_{j_k}^z} \cap (\alpha_i, \beta_i) \neq \emptyset$, otherwise we would have, for all indices k such that this is not true,

$$|u_{j_k}^z(\beta_i - 0) - u_{j_k}^z(\alpha_i + 0)| \leq \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |(u_{j_k}^z)'(t)| dt \leq$$

$$\leq \left\{ \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |(u_{j_k}^z)'(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\beta_i - \alpha_i}.$$

As k goes to infinity, the limit of the left-hand term would be greater than $\sigma_i/2$, while the limit of the right-hand term would be smaller than $\sqrt{\ell}\sqrt{2\delta_i} < \sigma_i/2$, a contradiction.

Now, for k large enough, both $u_{j_k}^z(\alpha_i)$ and $u_{j_k}^z(\beta_i)$ are less than $\sup_{B^z} u^z + 1/2 \leq M + 1/2$ (thus than M , since u_{j_k} takes its values in $[-M, M] \cup \{M+1\}$), so that if $S_{u_{j_k}^z} \cap (\alpha_i, \beta_i) \neq \emptyset$ it must contain at least two points (since any jump of $u_{j_k}^z$ occurs between a value lower than M and the value $M+1$).

We deduce that if k is large enough,

$$\mathcal{H}^0(B^z \cap S_{u_{j_k}^z}) \geq \sum_{i=1}^n \mathcal{H}^0((\alpha_i, \beta_i) \cap S_{u_{j_k}^z}) \geq 2n,$$

therefore

$$2 \mathcal{H}^0(B^z \cap S_{u^z}) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}^0(B^z \cap S_{u_j^z}).$$

Integrating over $z \in \xi^+$ and using Fatou's lemma we get (4.53). Finally, by a standard localization argument (used for instance in the proof of Theorem 3, see [Amb89b]), we deduce from (4.53) that

$$2 \mathcal{H}^{n-1}(S_u) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* A_j \cap \Omega),$$

hence (4.52). □

Remark. The same result holds if, instead of assuming u_j continuous on $\Omega \setminus A_j$, we assume that the boundary of A_j is “regular” in the sense that $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A_j \setminus \partial^* A_j) = 0$.

A.2 An application: the Mumford-Shah functional

The functional originally introduced by D. Mumford and J. Shah, in order to modelize the image segmentation problem in a continuous setting, is the following

$$\mathcal{G}(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u(x)|^2 dx + \mathcal{H}^{n-1}(K) + \int_{\Omega} |u(x) - g(x)|^2 dx, \quad (4.57)$$

where $g \in L^\infty(\Omega)$ is a given ‘‘original image’’, K is a closed set and $u \in C^1(\Omega \setminus K)$. L. Ambrosio and E. De Giorgi introduced the weak formulation in $GSBV(\Omega)$

$$G(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \mathcal{H}^{n-1}(S_u) + \int_{\Omega} |u(x) - g(x)|^2 dx, \quad (4.58)$$

and proved the existence of a minimizer for G using Theorem 3. Then, E. De Giorgi, M. Carriero and A. Leaci established the existence of a minimizer for \mathcal{G} by proving that if u minimizes G , then $\mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \overline{S_u} \setminus S_u) = 0$ and $u \in C^1(\Omega \setminus \overline{S_u})$, so that $(u, \overline{S_u})$ minimizes \mathcal{G} [DCL89].

In [DS97], Dibos and Séré showed that any minimizer u of G may be approximated by a sequence $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ of piecewise regular functions such that the jumps set S_{u_ε} of each u_ε is contained in a finite union of parallelipedic subsets of hyperplanes $(K_\varepsilon^1, \dots, K_\varepsilon^{n_\varepsilon})$, $u_\varepsilon \rightarrow u$ a.e. as ε goes to zero, and

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \mathcal{H}^{n-1}(K_\varepsilon^i) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \mathcal{H}^{n-1}(S_u).$$

This result is generalized in [Cor97]. In order to establish inequality (4.44) (section 4.3.2) we need a variant of [Cor97, Cor. 3.11], whose proof we do not give since it is easily derived from the proofs in [DS97] and [Cor97].

B The Γ -convergence

We shortly define the Γ -convergence of functionals (in metric spaces) and its main properties. For more details we refer to [Dal93].

Given a metric space (X, d) and $F_k : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ a sequence of functions, we define for every $u \in X$ the Γ -*lim inf* of F

$$F'(u) = \Gamma - \liminf_{k \rightarrow \infty} F_k(u) = \inf_{u_k \rightarrow u} \liminf_{k \rightarrow \infty} F_k(u_k)$$

and the Γ -*lim sup* of F

$$F''(u) = \Gamma - \limsup_{k \rightarrow \infty} F_k(u) = \inf_{u_k \rightarrow u} \limsup_{k \rightarrow \infty} F_k(u_k),$$

and we say that F_k Γ -converges to $F : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ if $F' = F'' = F$. F' , F'' , and F (if it exists) are lower semi-continuous on X . We have the following two properties:

1. F_k Γ -converges to F if and only if for every $u \in X$,

(i) for every sequence u_k converging to u , $F(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F_k(u_k)$;

(ii) there exists a sequence u_k that converges to u and such that
 $\limsup_{k \rightarrow \infty} F_k(u_k) \leq F(u);$

2. If $G : X \rightarrow \mathbf{R}$ is continuous and F_k Γ -converges to F , then $F_k + G$ Γ -converges to $F + G$.

The following result makes clear the interest of the notion of Γ -convergence:

Theorem 4. Assume F_k Γ -converges to F and for every k let u_k be a minimizer of F_k over X . Then, if the sequence (or a subsequence) u_k converges to some $u \in X$, u is a minimizer for F and $F_k(u_k)$ converges to $F(u)$.

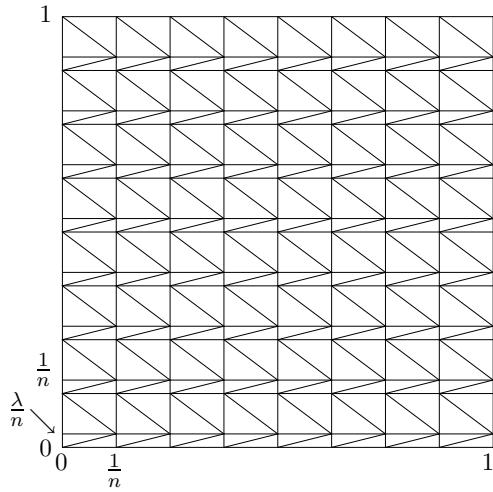
Finally, we give the following definition of Γ -convergence in the case where $(F_h)_{h>0}$ is a family of functionals on X indexed by a continuous parameter h : we say that F_h Γ -converges to F in X as $h \downarrow 0$ if and only if for every sequence (h_j) that converges to zero as $j \rightarrow \infty$, F_{h_j} Γ -converges to F .

C A strange triangulation

In this section we show why M^* has to be used instead of M in the definition (4.8) of F_ε . Actually, let $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, and for each $u^\varepsilon \in V_\varepsilon(\Omega)$, $\mathbf{T}^\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon(u^\varepsilon)$, let

$$I_\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon) = \sum_{T \in \mathbf{T}^\varepsilon} |T| M_T(|\nabla u^\varepsilon|^2).$$

We will construct a sequence u_n, \mathbf{T}_n , with $u_n \in V_{\frac{1}{n}}(\Omega)$ and $\mathbf{T}_n \in \mathcal{T}_\varepsilon(u_n)$, such that u_n converges to $u(x, y) \equiv y$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{\frac{1}{n}}(u_n, \mathbf{T}_n) < 1$. Fix $\lambda \in (0, 1)$ and, for $n \geq 1$, consider in \mathbf{R}^2 the dots $x_{k,l} = (\frac{k}{n}, \frac{l}{n})$, $k, l \in \mathbf{Z}$, and $y_{k,l} = (\frac{k}{n}, \frac{l+\lambda}{n})$, $k, l \in \mathbf{Z}$. Let \mathbf{T}_n be the triangulation of Ω made of the triangles $(x_{k,l}, x_{k+1,l}, y_{k,l})$, $(x_{k+1,l}, y_{k,l}, y_{k+1,l})$, of surface $\lambda/2n^2$, and of the triangles $(y_{k,l}, y_{k+1,l}, x_{k+1,l+1})$, $(y_{k,l}, x_{k,l+1}, x_{k+1,l+1})$, of surface $(1-\lambda)/2n^2$, contained in $\overline{\Omega}$ (Figure 4.9). We assume n is large and restrict our attention to the triangles included in $[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]^2$. We will call “small” triangles the triangles of surface $\lambda/2n^2$ and “large” triangles the other triangles. For each triangle T of one kind (i.e., “small” or “large”) there are 5 triangles T' of the same kind (including T itself) such that $T' \cap T \neq \emptyset$ and 8 triangles of the other kind satisfying the same property. We fix $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ and define a function u_n , with $u_n(\cdot, 0) \equiv 0$ and $u_n(\cdot, 1) \equiv 1$, such that $\nabla u_n = (0, 1+\alpha)$ on the small triangles and $\nabla u_n = (0, 1+\beta)$ on the large triangles. We must have

Figure 4.9: The triangulation \mathbf{T}_n .

$\lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta = 0$, so that u_n goes to u (uniformly, and weakly in $H^1(\Omega)$) as $n \rightarrow \infty$.

If T is a small triangle, $S_T = (8 - 3\lambda)/2n^2$, while if T is large, $S_T = (5 + 3\lambda)/2n^2$, so that for T small,

$$M_T(|\nabla u|^2) = \frac{5\lambda(1 + \alpha)^2 + 8(1 - \lambda)(1 + \beta)^2}{8 - 3\lambda}$$

and if T is large,

$$M_T(|\nabla u|^2) = \frac{5(1 - \lambda)(1 + \beta)^2 + 8\lambda(1 + \alpha)^2}{5 + 3\lambda}.$$

Since there are $2n^2$ triangles of each kind, we easily deduce that

$$I(\alpha, \beta, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\frac{1}{n}}(u_n, \mathbf{T}_n) = \lambda \frac{5\lambda(1 + \alpha)^2 + 8(1 - \lambda)(1 + \beta)^2}{8 - 3\lambda} + (1 - \lambda) \frac{5(1 - \lambda)(1 + \beta)^2 + 8\lambda(1 + \alpha)^2}{5 + 3\lambda}.$$

If λ is small, this expression is less than 1 for admissible values of α, β, λ , for instance,

$$I\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{45}, \frac{1}{10}\right) \simeq 0.9873$$

Bibliography

- [ABCBF94] G. Aubert, M. Barlaud, P. Charbonnier, and L. Blanc-Féraud. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. Technical Report TR#94-01, I3S, CNRS URA 1376, Sophia-Antipolis, France, 1994.
- [Amb89a] L. Ambrosio. A compactness theorem for a new class of functions with bounded variation. *Boll. Un. Mat. Ital.* (7), 3-B:857–881, 1989.
- [Amb89b] L. Ambrosio. Variational problems in SBV and image segmentation. *Acta Appl. Math.*, 17:1–40, 1989.
- [Amb90] L. Ambrosio. Existence theory for a new class of variational problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 111(1):291–322, 1990.
- [AT90] L. Ambrosio and V.M. Tortorelli. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ -convergence. *Comm. Pure Appl. Math.*, (43):999–1036, 1990.
- [BC94] G. Bellettini and A. Coscia. Discrete approximation of a free discontinuity problem. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 15:105–123, 1994.
- [BD96] A. Braides and G. Dal Maso. Non-local approximation of the Mumford-Shah functional. Technical Report 88/96/M, SISSA, Trieste, June 1996.
- [BL96a] H. Borouchaki and P. Laug. The bl2d mesh generator: Beginner’s guide, user’s and programmer’s manual. Technical Report RT-0194, INRIA, July 1996.
- [BL96b] H. Borouchaki and P. Laug. Maillage de courbes gouverné par une carte de métriques. Technical Report RR-2818, INRIA, March 1996.
- [Bou98] B. Bourdin. Image segmentation with a finite element method. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 1998. (to appear).
- [BZ87] A. Blake and A. Zisserman. *Visual Reconstruction*. MIT Press, 1987.

- [CD98] A. Chambolle and G. Dal Maso. Discrete approximation of the Mumford-Shah functional in dimension two. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 1998. (to appear).
- [Cha98] A. Chambolle. Finite differences discretizations of the Mumford-Shah functional. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 1998. (to appear).
- [Cor97] G. Cortesani. Strong approximation of *GSBV* functions by piecewise smooth functions. Technical Report 66/97/M, SISSA, Trieste, May 1997.
- [Dal93] G. Dal Maso. *An introduction to Γ -convergence*. Birkhäuser, Boston, 1993.
- [DCL89] E. De Giorgi, M. Carriero, and A. Leaci. Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 108:195–218, 1989.
- [DS97] F. Dibos and E. Séré. An approximation result for the minimizers of Mumford-Shah functional. *Boll. Un. Mat. Ital. (7)*, 11-A:149–162, 1997.
- [EG92] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [ET76] I. Ekeland and R. Temam. *Convex analysis and variational problems*. NorthHolland, Amsterdam, 1976.
- [Fed69] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, New-York, 1969.
- [FM98] G. Francfort and J.-J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids.*, 46, 1998. (to appear).
- [FVP95] S. Finzi-Vita and P. Perugia. Some numerical experiments on the variational approach to image segmentation. In *Proc. of the Second European Workshop on Image Processing and Mean Curvature Motion*, pages 233–240, Palma de Mallorca, September 25-27 1995.

- [GG84] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Trans. PAMI*, PAMI-6(6), November 1984.
- [Giu84] E. Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Birkhäuser, Boston, 1984.
- [GR92] D. Geman and G. Reynolds. Constrained image restoration and the recovery of discontinuities. *IEEE Trans. PAMI*, PAMI-3(14):367–383, 1992.
- [MS89] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42:577–685, 1989.
- [RT83] P. A. Raviart and J. M. Thomas. *Introduction à l’analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, 1983.
- [Sig97] O. Sigmund. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. *Mech. Struct. & Mach.*, 25(4):493–524, 1997.
- [Zie89] W. P. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

Chapitre 5

Expériences numériques en mécanique de la rupture fragile

NUMERICAL EXPERIMENTS IN REVISITED BRITTLE FRACTURE.

B. BOURDIN G. A. FRANCFOORT

J.-J. MARIGO¹

Institut Galilée, Université Paris-Nord, 93430 Villetaneuse, France

Abstract

The numerical implementation of the model of brittle fracture developed in [FM98] is presented. Various computational methods based on variational approximations of the original functional are proposed. They are tested on several antiplanar and planar examples that are beyond the reach of the classical computational tools of fracture mechanics.

Keywords : fracture, fracture toughness, energy methods, variational calculus, finite elements.

5.1 Introduction

The present work follows in the footsteps of a previous study [FM98] where a variational model for quasistatic crack evolution in a brittle material is proposed. Its merits and drawbacks are elaborated upon in [FM98] and we will presently refrain from any further commenting, so as to concentrate instead on a numerical feasibility study. Our goal is to convince the reader that the model lives up to its theoretical expectation and is a useful and manageable predictive tool. To this end, we will confront settings that are beyond the scope of the usual computational arsenal of the investigator in the field; we will demonstrate that a carefully tailored numerical version of the model does not stall in such hostile environments but delivers cracks evolutions which fit squarely within the proposed framework.

Of course, we still fall short of the ultimate goal of any predictive theory, namely the corroboration and prediction of experimental results. Such a goal cannot be contemplated without prior internal review of the self-consistency of the model. This is how the present work should be viewed, although we do not turn a blind eye to experimental results, whenever they are known to us. But, in all fairness, such comparisons can only be qualitative in the absence of a detailed experimental/numerical protocol. We do hope to be able, in a not too distant future, to report on the success —or failure— of such an undertaking.

¹To whom correspondence should be addressed. e-Mail : marigo@lpmtm.univ-paris13.fr

Let us now briefly recapitulate the main features of the model in an exemplary setting: a homogeneous two-dimensional elastic body Ω with elasticity tensor A and fracture toughness k is submitted to an imposed displacement field $U(t, x)$ on the part $\partial\Omega \setminus \mathcal{N}$ of its boundary and free of tractions on the complementary part \mathcal{N} of that boundary. We further assume that, at time $t = 0$, the body Ω is uncracked and that $U(t, x) = tU(x)$, where $U(x)$ is a smooth displacement field. If Γ is a crack, a compact in $\overline{\Omega}$ (the crack may go to the boundary), its surface energy is

$$E_s(\Gamma) = k\mathcal{H}^1(\Gamma \setminus \mathcal{N}),$$

where, here and in the remainder of the paper, \mathcal{H}^{n-1} denotes the $n - 1$ -dimensional Hausdorff measure, a measure which coincides with the usual surface measure for smooth enough hypersurfaces of \mathbf{R}^n . Note that the surface energy will be infinite for cracks that are too fat, *i.e.*, with infinite one-dimensional Hausdorff measure. Note also that this definition of the surface energy slightly departs from that proposed in [FM98]; the resulting formulation will however be equivalent.

We now define the bulk energy as

$$E_e(\Gamma, t) = \inf_w \left\{ \int_{\Omega \setminus \Gamma} Ae(w) \cdot e(w) dx; w = U(t) \text{ on } \partial\Omega \setminus (\mathcal{N} \cup \Gamma) \right\},$$

where $e(w) = 1/2(\nabla w + \nabla w^t)$. A more precise definition is given in [FM98]. It is worth emphasizing that the bulk energy is not a minimum, but merely an infimum because the infimum might not be attained if Γ is not smooth “enough”.

The total energy is defined as

$$E(\Gamma, t) = E_s(\Gamma) + E_e(\Gamma, t).$$

The evolution of the crack is then governed by the following law (see Law 2.9 in [FM98]):

- (a) $\Gamma(t) \nearrow$ with t with $\Gamma(t) = \emptyset$, $t < 0$,
- (b) $E(\Gamma(t), t) \leq E(\Gamma, t)$, for any $\Gamma \supset \cup_{s < t} \Gamma(s)$,
- (c) $E(\Gamma(t), t) \leq E(\Gamma(s), t)$, for all $s < t$.

As noted in [FM98] the first condition forces the crack to grow with time, the second states that the total energy of the actual crack is minimal among all cracks that are compatible with the fracture state at the current time, while the third and surprising condition forces the crack to keep track of its prior energetic states. The latter condition is shown in [FM98] to amount to a selection criterion among possible crack evolutions (see Remark 4.18 in [FM98]). Remark also that fat cracks are prohibited by condition (b).

Whenever time is discretized —which is certainly the case in any numerical simulation—and the time steps are $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_p \leq \dots$, conditions (a)-(c) degenerate into

- (a) $\Gamma_i \supset \Gamma_{i-1}$,

- (b) $E(\Gamma_i, t_i) \leq E(\Gamma, t_i)$, for all $\Gamma \supset \Gamma_i$,

which is more readily interpreted than its continuous analogue.

Our goal is to implement the discretized scheme in a realistic setting. A brute force approach is doomed because we do not *a priori* know the locus of the optimal crack at time t_i . The two methods detailed in Section 5.2 address the aforementioned issue. Both are based on the concept of Γ -convergence which describes in mathematical terms how a sequence of functionals depending on a parameter converges to the desired functional as that parameter tends to 0 (see Section 5.2).

The first method introduces a two-field functional; the first field approximates the solution-displacement field for the given boundary displacement and for the solution-crack while the second is a field that varies between 0 and 1, takes the value 0 near the crack and 1 away from it. This functional, which has been introduced in the context of image segmentation in [AT90], is a continuous two-field functional. It has to be further discretized, so as to become amenable to numerical implementation. The functional, its discretization and associated issues are discussed in Subsection 5.2.1.

The second method goes directly to the discrete level by introducing a one-field functional defined on a triangulation of the domain. In essence, it is also a two-field functional, but the second field is a triangulation. That functional and associated issues are discussed in Subsection 5.2.2.

The short subsection 5.2.3 aims at comparing the two methods and refers for such a task to the example developed in Subsection 5.3.1.

Subsection 5.2.4 mentions the additional theoretical hurdles raised by a plane elasticity setting.

Section 5.3 is devoted to the computation of three evolutions that illustrate the flexibility of the methods introduced in Section 5.2. Subsection 5.3.1 investigates the tearing of a rigid reinforcement in an elastic matrix; Subsection 5.3.2 looks at crack growth in a fiber reinforced rectangular matrix submitted to monotonically increasing displacements on one of its sides; Subsection 5.3.3 follows the mixed mode propagation of a preexisting crack in a rectangular plate.

Unfortunately, the intricacies of the proposed schemes are, as in all numerical studies, of a mathematical nature. Although we made every feasible attempt to keep technicalities to the bare minimum, we could not ignore or bypass notions such as Γ -convergence, because those are at the root of a satisfactory handling of the model. The mechanical soundness of the model cannot be found in its numerical implementation, but rather in the results that such an implementation will produce. Therefore, a reader merely interested in confronting the model with her own mechanical intuition is urged to skip Section 5.2 and to ponder the examples presented in Section 5.3; she, as well as others, should however refrain from lending mechanical significance to the approximations discussed in Section 5.2.

5.2 Numerical implementation of the model

This section is devoted to an exposition of two numerical methods that are suited to the implementation of the model presented in the introduction.

Our model of brittle fracture is close to a model of image segmentation, namely that obtained through the minimization of the Mumford-Shah functional [MS89]; the latter has been thoroughly investigated in recent years. For a given grey level image, (*i.e.*, a real valued function g , defined on a bounded open domain Ω), the goal is to minimize the following energy

$$\int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 + |u - g|^2 dx + \mathcal{H}^{n-1}(K),$$

over each compact subset of \mathbf{R}^n , K (the “edge set” of the image) and each real valued function u (the “segmented image”), continuous on $\Omega \setminus K$.

From a mathematical standpoint this minimization problem is awkward, mainly because it is not easy to see how to topologize such compact sets. The remarkable “trick” used in [DGCL89] is to resort to an adequate weak formulation of this problem in a framework that is more classical from the standpoint of the calculus of variations, albeit at the expense of using a somewhat exotic functional space, the space of special bounded variation functions, $SBV(\Omega)$, a space introduced in [Amb90] which allows for jump discontinuities in the fields (the jump set of an element u in $SBV(\Omega)$ is denoted by S_u). The weak functional is then defined as

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 + |v - g|^2 dx + \mathcal{H}^{n-1}(S_v \cap \Omega).$$

Using results in [Amb89b], [Amb89a] and [Amb89b], the latter is shown in [DGCL89] to admit a minimum v in $SBV(\Omega)$, and it is also shown there that the pair $(v, \overline{S_v})$ is a solution to the original problem.

The weak formulation provides a good starting point for a numerical implementation of the Mumford-Shah model. That this is so is not obvious at first glance because functions of $SBV(\Omega)$ can exhibit jump discontinuities on arbitrary “smooth” lower-dimensional manifolds. A classical finite element method —or finite difference method, or any other method for that matter— is immediately doomed since the locus of the jump set is *a priori* unknown. The proposed methods rely on some kind of “regularization” through Γ -convergence (see [AT90], [AT92] and [CD98] for different regularizations). There is still the additional task of implementing a numerical method for the minimization of the regularized problem ([FVP95] [Bou99], [Cha98], [BC98], [BC94]).

The antiplane isotropic elasticity case with constant elasticity and fracture toughness is the closest in spirit to the Mumford-Shah functional. In the former however, non-homogeneous Dirichlet boundary conditions will replace the $\int_{\Omega} |u - g|^2 dx$ term while the set of admissible cracks will be somewhat different from the set of edges. Indeed, while in the image context, edges are to be detected *inside* the domain, cracks are to be accounted

for *inside* and *at the boundary* of the domain. As such, the weak formulation cannot be a direct transposition of that established for the image problem. A similar difficulty has been addressed in [CL90] through the use of an extension of the boundary condition to the whole space \mathbf{R}^n . This method will be slightly modified so as to be in a position to treat a mixed boundary value problem.

The numerical models used for the isotropic antiplane case with constant toughness are described below. Their extension to plane elasticity is also discussed. The mathematical details are kept to the absolute minimum and the interested reader should refer to the quoted references for a rigorous study. Firstly, we present the weak formulation and explain how boundary conditions are dealt with, then we suggest two regularizations of the resulting functional and detail their implementations. Finally a comparison between those is conducted on a test case (see Subsection 5.3.1).

In what follows, Ω denotes a bounded open domain of \mathbf{R}^2 with piecewise Lipschitz boundary and U , a $W^{1,\infty}$ function. The variational model for brittle fracture described in this section is applied to an isotropic antiplane case with constant fracture toughness and, for the sake of simplicity, we will assume that the toughness is 1 and that the Lamé coefficient μ is 2. Note however that general values of μ can be recovered by a change of scales, because the energy is not scale invariant. The “strong” problem is given by the functional

$$\mathcal{E}(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K \cap \bar{\Omega}),$$

for each admissible crack set $K \subset \bar{\Omega}$ and each admissible function, $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)$ such that $u = U$ on a part of $\partial\Omega$, denoted by \mathcal{D} , and such that $\partial u / \partial n = 0$ on $\mathcal{N} = \partial\Omega \setminus \mathcal{D}$. As noted above, the formulation must allow for jumps of u on $\partial\Omega$. Thus the functional \mathcal{E} is redefined on a “large enough” open set $\tilde{\Omega}$, containing $\bar{\Omega}$ (an estimate of “how large” $\tilde{\Omega}$ should be will be given). We are now in a position to lend a meaning to the Dirichlet boundary condition U upon replacing the set of admissible functions by the set of $W^{1,2}(\tilde{\Omega} \setminus K)$ -functions with prescribed value U on $\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}$. We have however lost the traction free boundary conditions on \mathcal{N} . They are recovered by allowing $\tilde{\Omega}$ to experience free cracking wherever the normal derivative of the function u should be zero. The surface energy is thus computed on $\bar{\Omega} \setminus \mathcal{N}$ (*i.e.*, $\mathcal{H}^1(K)$ is replaced by $\mathcal{H}^1(K \setminus \mathcal{N})$). The mixed boundary problem is

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \text{Find a compact subset } K \text{ of } \bar{\Omega}, \text{ and} \\ u \in \mathcal{U}_s = \{v \in W^{1,2}(\tilde{\Omega} \setminus (K \cup \mathcal{N})) \text{ such that } v = U \text{ on } \tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}\}, \\ \text{that minimizes} \\ \mathcal{E}(v, K) = \int_{\Omega \setminus (K \cup \mathcal{N})} |\nabla v|^2 dx + \mathcal{H}^1(S_v \setminus \mathcal{N}). \end{cases}$$

Note that such a procedure permits to consider cracked domains with traction-free crack lips upon letting \mathcal{N} be a subset of $\bar{\Omega}$ instead of $\partial\Omega$.

It can be proved (see Bourdin (1998b)) that the “strong” problem is equivalent to the

following “weak” problem:

$$(P) : \begin{cases} \text{Find } u \in SBV(\tilde{\Omega}), \text{ such that } u = U \text{ on } \tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}, \text{ minimizing} \\ E(v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \mathcal{H}^1(S_v \setminus \mathcal{N}) \\ \text{on } \mathcal{U}_w = \{v \in SBV(\tilde{\Omega}) \text{ such that } v = U \text{ on } \tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}\}. \end{cases}$$

In other words the problem (P) admits $(u, \overline{S_u \setminus \mathcal{N}})$ as a minimum. Let us merely recall the main steps in the proof. It is firstly shown that if (u, K) is a minimizer for (P) , then u is an admissible function for (P) and its weak energy $E(u)$ is lower than or equal to than its strong energy $\mathcal{E}(u, K)$. Then one establishes the existence of at least one solution to the weak problem and one shows that the associated jump set satisfies $\mathcal{H}^1((\overline{S_u \setminus \mathcal{N}}) \setminus (S_u \setminus \mathcal{N})) = 0$ (*i.e.*, $\mathcal{E}(u, \overline{S_u \setminus \mathcal{N}}) = E(u)$) which yields the existence of a solution to (P) .

The weak problem is closer to a standard minimization problem but does not yet fit into an adequate framework for numerical implementation (the set K has been somehow “artificially” removed in E , but the jump set S_u is still a problem as far as the numerical implementation is concerned). But, as will be seen below, a correct approximation of the weak problem is in turn amenable to numerical implementation.

The two methods introduced below make use of the same analytical tools. Formally, we build a sequence of regularized functionals $\{E_c\}_c$ and successively prove its Γ -convergence to E , the existence of minimizers for each of its terms E_c and the compactness of the resulting sequence. We merely recall the definition of Γ -convergence and explain how the above quoted properties can give rise to an adequate numerical scheme. Let us define a functional G and a sequence $\{G_c\}_c$ on a functional space X . Then, G_c $\Gamma(\tau)$ -converges to G when $c \rightarrow 0$ if the following properties are met by each function $u \in X$

i) each sequence of functions $\{u_c\}_c$ in X converging to u for the topology τ satisfies

$$\liminf_{c \rightarrow 0} G_c(u_c) \geq G(u);$$

ii) there exists a sequence of functions $(u_c)_c$ in X that converges to u for the topology τ , such that

$$\limsup_{c \rightarrow 0} G_c(u_c) \leq G(u)$$

If both properties hold true, let $\{\tilde{u}_c\}_c$ be a sequence of minimizer for $\{G_c\}_c$. By the compactness property, there exists $\tilde{u} \in X$ such that, for a subsequence of \tilde{u}_c , still indexed by c , $\tilde{u}_c \xrightarrow{\tau} \tilde{u}$; by the estimate for the lower Γ -limit, ones deduces than $\liminf_{c \rightarrow 0} G_c(\tilde{u}_c) \geq G(\tilde{u})$ and then by applying the estimate for the upper Γ -limit to the minimum for G , there exists, for each $v \in X$, a sequence $\{v_c\}_c$ converging to v such that

$$G(v) \geq \limsup_{c \rightarrow 0} G_c(v_c) \geq \liminf_{c \rightarrow 0} G_c(\tilde{u}_c) \geq G(\tilde{u}),$$

so that \tilde{u} is a minimizer for G and $G_c(\tilde{u}_c) \xrightarrow{c \rightarrow 0} G(\tilde{u})$.

We are now in a position to introduce two different regularizations of the weak energy E in the antiplane case. While the first one is a straightforward adaptation of a well-known regularization of the Mumford-Shah problem (see [AT90] and [AT92])—itself in the spirit of a result on the regularization of a phase transition problem (see [MM77])—, the approach in the second one is totally different and extensively uses the mesh adaptation techniques. We will detail the computation of the first time step, according to the discrete time scheme introduced in [FM98] and extend both methods to the following time steps.

5.2.1 Approximation by an elliptic functional

In this subsection, we adapt the regularized formulation used in Ambrosio and Tortorelli (1992) to our problem and discuss its implementation.

The main idea in this kind of approximation is to introduce an auxiliary variable (subsequently denoted by v) that represents in some sense the jump set in E . In order to lend a meaning to the Γ -convergence of a two-field functional to a one-field one, it is convenient to extend the definition of E by setting

$$F(u, v) = \begin{cases} E(u) & \text{if } u \in SBV(\tilde{\Omega}), u = U \text{ on } \tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}, \text{ and } v = 1 \text{ a.e. on } \tilde{\Omega}, \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (5.1)$$

and to introduce the following regularized functional, for each $u \in W^{1,2}(\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N})$ and $v \in W^{1,2}(\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}; [0, 1])$,

$$E_c(u, v) = \int_{\Omega \setminus \mathcal{N}} (v^2 + k_c) |\nabla u|^2 dx + \int_{\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}} (c |\nabla v|^2 + \frac{(1-v)^2}{4c}) dx, \quad (5.2)$$

where k_c is a positive constant depending only on c . We then define

$$F_c(u, v) = \begin{cases} E_c(u, v) & \text{if } u \in W^{1,2}(\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}), u = U \text{ on } \tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}, \text{ and } v \in W^{1,2}(\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}; [0, 1]) \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5.3)$$

Then, if $k_c \ll c$ when $c \rightarrow 0$, the following properties are proved:

- i) F_c $\Gamma(L^2)$ -converges to F as $c \rightarrow 0$,
- ii) there exists at least one minimizer (u_c, v_c) for E_c with prescribed value U on $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$,
- iii) the sequence of minimizers for F_c is compact in L^2 .

Thus, in the limit the minimization of F and that of F_c are equivalent. The proofs of the Γ -limit estimates further demonstrate that the first part of the regularized energy $\int_{\Omega \setminus \mathcal{N}} (v^2 + k_c) |\nabla u|^2 dx$ converges to the bulk energy $\int_{\Omega \setminus \mathcal{N}} |\nabla u|^2 dx$ while the second one converges to the surface energy $\mathcal{H}^1(S_u \setminus \mathcal{N})$. Finally, the auxiliary function v in E_c converges pointwise to 1 on $\tilde{\Omega} \setminus S_u$ and to 0 on S_u .

The same Γ -convergence result holds for the discrete functional $E_{c,h}$, defined by the projection of E_c over a piecewise affine finite element space, provided that the characteristic length of the mesh, h (defined as the radius of a circle included in or containing an element) tends to zero faster than the infinitesimals k_c and c [BC94]). In the following subheading, we discuss the numerical solving of the discrete minimization problem.

Numerical solving of the discrete problem

We propose to minimize the regularized functional for small c 's. Note however that the Γ -convergence result does not provide an error estimate between the minimizers for E and those for $E_{c,h}$, so that we cannot evaluate how close the computed solution is to that of the original problem.

At this stage, quite a few technical issues are to be addressed. Firstly, in view of the presence of the term $v^2|\nabla u|^2$, the functional $E_{c,h}$ is not convex in (u,v) . Then, even if the existence of a minimizer is proved, it may not be unique (remark that since this is also true of the strong and weak functionals, a regularized functional, the minimizer of which is unique would be a bad candidate for actual numerical use). Further, the convergence criterion is rather ambiguous, and does not guide our choice of the parameters c , k_c , h and of the size of $\tilde{\Omega}$. Let us first describe the minimization of the discrete functional, assuming that the fixed parameters c , k_c and h are already suitable for a good approximation.

Although $E_{c,h}$ is not convex in general, it is convex and coercive in *each* variable, so that, once one of the fields is fixed, the minimization with respect to the other variable is easy. The idea is then to iterate minimizations in each variable until the successive minimizers are close enough to one another. This alternate minimization method is similar to the relaxation algorithm for quadratic problems (in order to prevent any confusion between the relaxation method for solving quadratic problems and the functional theory of relaxation, we will keep calling the method alternate minimization). Again, we are unable to prove the convergence of this algorithm; the sequence of optimal energies does converge and, up to a subsequence, the alternate minimizers converge to some critical point of $E_{c,h}$. Both minimization problems are implemented by a standard finite elements method, with triangular first order Lagrange elements. As discussed in the next section, it is not required nor desirable to use higher order elements. Remark that the u -problem can be solved in the *physical* domain Ω , while the v -problem needs to be implemented on the *logical* domain $\tilde{\Omega}$. Note that, for the sake of simplicity, we use the same triangulation for both problems. The minimization algorithm is then

- *initialization*

Fix the regularization parameter c , the mesh size h and the parameter k_c , build a triangulation of $\tilde{\Omega}$ and choose a “good” starting point v_0 ,

- *iteration k*
 - i) Compute u_k , minimizing $E_{c,h}(\bullet, v_{k-1})$ on Ω for the given boundary conditions,
 - ii) extend u_k by U on $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$,
 - iii) compute v_k , minimizing $E_{c,h}(u_k, \bullet)$ on $\tilde{\Omega}$.
 - iv) If $\|v_k - v_{k-1}\|_\infty \geq \varepsilon$, perform an additional step; if not, exit.
- *conclusion*

Compute the optimal energies, save data and return to the initialization step for the next time step.

The implementation of the next load steps in the study of a monotonically increasing load follows easily. Since it suffices to add an irreversibility criterion on the crack set (*i.e.*, that the cracks do not experience self-healing as the load increases), one should disconnect the nodes where a crack is detected, or, equivalently, add restrictions on the admissible set for the crack field by imposing some homogeneous Dirichlet conditions on the detected crack field v . The second solution is that which has been implemented.

Parameter adjustment

We now discuss the choice of parameters for an actual and efficient numerical implementation of the algorithm. The numerical parameters that have to be set prior to any computation are the logical domain $\tilde{\Omega}$, the regularization parameters c and k_c and the mesh step h . The role of the parameter k_c is easy to understand. It is used to ensure the existence of the minimizers for E_c at fixed c . As far as the solving of the discrete problem is concerned, it is used to prevent the problem from being ill-posed. Assume that $k_c = 0$; then, if the v field is numerically equal to zero for a node and for each of its neighbors, the corresponding line of the finite element matrix and of its right hand-side are both identically equal to zero and the solving of the linear system associated with the finite element problem will diverge. On contrary, if k_c is too big, then some rigidity will remain in the cracked region, and the bulk energy will be overestimated while the energy restitution of a crack will be underestimated. The choice of this parameter is then a compromise between numerical stability and efficiency.

The choice of the other parameters is more subtle and requires the study of various estimates for the upper and lower Γ -limits. For the sake of simplicity, we only investigate the sequence built for the estimate from above in the Γ -limit in a one-dimensional case. Assume that the crack is at the section $\tau = 0$ of the domain, τ being a parameterization of the bar. In that case, the function v , built in the upper Γ -limit estimate is equal to 0 for $|\tau| \leq Ch$, and to $1 - \exp(-|\tau|/2c)$ otherwise. Thus, for fixed h and c , the first term is of the order of h/c , which illustrates the hypothesis $h \ll c$. Note that this estimate is independent of the order of the finite element method, so that increasing the accuracy of the discrete approximation through the use of a higher order interpolation operator will not be beneficial. Note also that

this criterion is only required “close” to the cracks, so fine meshing is only necessary across the cracks.

The estimate for v “far” from the cracks is useful for understanding how big $\tilde{\Omega}$ should be compared to Ω . Let us neglect the discretization error. The approximation of v far from the jumps of the displacement field implies that the computed surface energy in that region is less than $1/c \int_0^T \exp(-t/c) dt$, where $T = \text{dist}(S_u, \partial\tilde{\Omega})$. So the error on the surface energy term is of the order of $\exp(-T/c)$.

The last parameter is the regularization constant, c . Its influence on the computed energy and minimizers has a mechanical interpretation: E_c resembles a damage model where v is the damage variable. This is however a mere mathematical artifact, although it does establish the convergence of a very specific damage model to a fracture model. In this context, the parameter c can be interpreted as a characteristic damage scale; a softening phenomenon takes place across the crack, causing the bulk energy to be underestimated.

The previous considerations can be summarized as follows:

- c must be chosen small enough to prevent a softening effect that causes the bulk energy to be underestimated and large enough compared to the discretization step h near the cracks, so as not to overestimate the surface energy.
- k_c must be big enough to prevent the numerical scheme from diverging but small enough, so as not to overestimate the bulk energy near the crack.
- The logical domain must be tailored to c , so as to adequately estimate the energy of cracks near the boundary of the physical domain.

Our remarks on the shape of the approximating crack field permit an easy implementation of an adaptive mesh strategy where the v field is used as an error estimator in a mesh generator that refines the triangulation wherever h is close to 0 (close to the cracks), and possibly enlarges elements elsewhere. This kind of adaptive approach seems very promising in terms of computational cost. Indeed, the proposed algorithm forces the solving of an elasticity-like problem (the u -problem) at each alternate minimization step (we have observed up to 150 such steps for a single loading step). Thus, any improvement in the finite element process (assembly, linear system solving) could drastically reduce the computational cost.

That last datum to be set before starting the algorithm is the starting point v_0 . For want of uniqueness of the minimizers, the algorithm will be sensitive to the choice of v_0 . As first time step in a discrete time scheme, we choose $v_0 \equiv 1$. At the next time step, we can choose either to reuse the last computed field v or to start again with $v_0 \equiv 1$. In the numerical experiments presented below, we initialize $v_0 \equiv 1$ at each time step.

5.2.2 Approximation by means of adaptive finite elements

In this section, we briefly detail the implementation of a second approximation that makes an extensive use of the mesh adaptation techniques. The method is based on that developed

for the Mumford-Shah problem in [BC98], where the numerical implementation and the mathematical properties of a variant of an approximation proposed in [CD98] is detailed.

The main difference between this method and the previous one is that we try to build a regularized functional defined on a finite element space—a finite dimensional space—instead of discretizing a continuous approximation of E .

Firstly, we define a set of triangulation $\mathcal{T}_h(\tilde{\Omega})$, for each $k \geq 6$ and $0 < \theta_0 \leq 60^\circ$ of $\tilde{\Omega}$, the triangles T of which exhibit the following characteristics:

- the length of all three edges of T lies between h and kh ,
- the three angles of T are greater than or equal to θ_0 .

We call $V_c(\tilde{\Omega})$, the set of continuous and piecewise affine functions of $\tilde{\Omega}$ and, for $u \in V_c(\tilde{\Omega})$, $\mathcal{T}_h(u) \subseteq \mathcal{T}_h(\tilde{\Omega})$, the set of all triangulations *adapted* to u , *i.e.*, such that u belongs to the Lagrange first order finite element induced by $\mathcal{T}_h(\tilde{\Omega})$. Then we consider a non decreasing concave function $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ such that

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1/3,$$

for example $f(t) = 2\tan^{-1}(3\pi t/2)/3\pi$. For each piecewise constant function v , defined on a triangulation \mathbf{T} , we denote by v_T its value on the element $T \in \mathbf{T}$ and define the following regularizing operators

$$(Mv)_T = M_T(v) = \frac{\sum_{T' \in \mathbf{T}, T' \cap T \neq \emptyset} |T' \cap \tilde{\Omega}| v_{T'}}{\sum_{T' \in \mathbf{T}, T' \cap T \neq \emptyset} |T' \cap \tilde{\Omega}|} \quad (5.4)$$

and its adjoint

$$(M^*v)_T = M_T^*(v) = \sum_{T' \in \mathbf{T}, T' \cap T \neq \emptyset} \frac{|T' \cap \tilde{\Omega}|}{S_{T'}} v_{T'}, \quad (5.5)$$

where $S_T = \sum_{T' \cap T \neq \emptyset} |T' \cap \tilde{\Omega}|$. Then, for each $u \in L^2(\tilde{\Omega})$ and each $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_h(\tilde{\Omega})$, we define the functionals

$$G_h(u, \mathbf{T}) = \begin{cases} \sum_{T \in \mathbf{T}} |T \cap \tilde{\Omega}| \frac{1}{h_T} f(h_T M_T^*(|\nabla u|^2)), & \text{if } u \in V_h(\tilde{\Omega}), \mathbf{T} \in \mathcal{T}(u), \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (5.6)$$

and

$$G_h(u) = \min_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_h(\tilde{\Omega})} G_h(u, \mathbf{T}). \quad (5.7)$$

It is proved in Bourdin and Chambolle (to appear) that there exists $\Theta > 0$ such that if $\theta_0 \geq \Theta$ then as $h \rightarrow 0$, $G_h \Gamma(L^2(\tilde{\Omega}))$ -converges to the functional defined on L^2 by

$$G(u) = \begin{cases} \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(S_u), & \text{if } u \in L^2(\tilde{\Omega}) \cap GSBV(\tilde{\Omega}), \\ +\infty, & \text{if } u \in L^2(\tilde{\Omega}) \setminus GSBV(\tilde{\Omega}), \end{cases} \quad (5.8)$$

where $GSBV(\tilde{\Omega})$ is the space of functions such that all their truncates lie in $SBV(\tilde{\Omega})$.

According to the remarks made in the previous sections, we now wish to minimize G_h for a small h . Recall that the mesh itself is a minimization variable; the construction for the estimate from above in the Γ -limit shows how to build the optimal triangulation, given the optimal displacement field u , for the approximated functional (5.7). This minimizer u being obviously unknown (since it is exactly what we are trying to compute), we propose to deduce some nearly optimal triangulation from a previously computed approximation u_ε , assuming that it is “close” to u . The following iterative algorithm that can also be seen as a relaxation algorithm between the two unknowns is proposed for the solving of (5.6):

- *initialization* (background mesh generation):
given h_0 , choose an arbitrary (regular) triangulation \mathbf{T}_{h_0} .
- *iteration i* (minimization process):
 - i) find u_i solving $\min_{u \in V_{h_i}(\tilde{\Omega})} G_{h_i}(u, \mathbf{T}_{h_i})$ with prescribed value U on $\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$,
 - ii) mesh adaptation: build the mesh $\mathbf{T}_{h_{i+1}}$ for u_i and h_{i+1} (possibly equal to h_i).

Note that we do not know how to *truly* minimize (5.6) with respect to the triangulation, and merely *estimate* a near optimal triangulation, used in the construction of the upper Γ -limit.

The minimization with respect to u is addressed through a dualization technique where an auxiliary variable v , constant on each element, is introduced; it relies on elementary properties of the Fenchel transform. Assume that f is differentiable and extend it by $-\infty$ on $]-\infty, 0]$. The Fenchel transform of $-f$ is

$$\psi(-v) = \sup_{t \in \mathbf{R}} \{tv - (-f)(t)\} = (-f)^*(v).$$

By a classical result (see for example Ekeland and Temam (1976)), $(-f)^{**} = -f$, so that

$$-f(t) = \sup_{v \in \mathbf{R}} \{tv - \psi(-v)\} = \inf_{v \in \mathbf{R}} \{tv + \psi(v)\}.$$

Hence,

$$f(t) = \min_{v \in [0,1]} \{tv + \psi(v)\}$$

and the minimum is reached for $v = f'(t)$, so that $v(t)$ varies between 0 and 1. Given \mathbf{T}_h , the minimization of (5.6) is then equivalent to that of

$$\sum_{T \in \mathbf{T}_h} |T \cap \Omega| \left(v_T M_T^*(|\nabla u|^2) + \frac{\psi(v_T)}{h_T} \right) \quad (5.9)$$

which is again implemented by an alternate minimization scheme between both variable u and v . While the u -problem is solved by a finite element method, given u and the triangulation, the optimal value for $M_T(v)$ is given by

$$M_T(v) = M_T(f'(hM^*(|\nabla u|^2))$$

thus we do not explicitly compute ψ or v .

The boundary conditions on u are taken into account in a way similar to that of the previous method: the “physical” domain is extended into a “logical” domain, where the displacement field is fixed at its boundary value U , and the boundary of the “physical” domain is cracked (its nodes are disconnected) along its Neuman part \mathcal{N} .

It is easily seen that if u wants to jump across a triangle T then $M_T^*(|\nabla u|^2)$ tends to $+\infty$ with h and thus v_T tends to 0 with h , while otherwise $M_T^*(|\nabla u|^2)$ tends to 1 thus v_T as well, hence v_T plays in the present context a role similar to that of the v -field in the first approximation method. The irreversibility of the crack field for an increasing load is addressed by forcing the v_T -field for the time step i to remain equal to zero if it is so at the time step $i - 1$.

The description of the triangulation adapted to u is the following: “Close” to the jump set of u , the triangles are as flat as feasible within the admissible class and thus “follow” the crack field, while, “far” from the jump, there is no recipe on how to position the elements. Therefore, we use an anisotropic mesh generator, and build an estimator defined at each node of the triangulation by a metric, itself built from the value of the v field and the gradient of the displacement field u . For a detailed discussion on anisotropic mesh adaptation, refer to [BL96].

5.2.3 Mutual advantages of both methods

Since we cannot prove convergence, a comparison between results computed by the two different methods can help to decide on the reliability of the numerical simulations. We illustrate with an example that the results of both methods seem satisfactory and refer the reader to Subsection 5.3.1 where the tearing of a reinforcement provides a benchmark for that comparison.

In the light of Subsection 5.3.1 below the following is not without merit: The first method seems very stable and will, for a sound choice of parameters c , k_c and h , give a good estimate of the different terms of the energy \mathcal{E} . On the other hand, the second method is very fast, because the solution of the v -problem is explicitly given, and also because after each adaptation step the number of nodes of the adapted mesh can be reduced (in the example of figure 5.2, the first mesh (5.2(a)) is made of 2615 nodes while the last one (5.2(c)) is made of only 1005).

5.2.4 Remarks on the plane elasticity case

The study of the plane elasticity problem is still in its infancy. The equivalence between strong and weak formulation is not established at this time. Furthermore non-interpenetration of the crack lips should be imposed. The numerical adaptation of the algorithm to a linear isotropic elasticity problem in the absence of unilateral conditions is similar to that of the antiplane case. The regularized functional that has to be minimized is

$$\int_{\Omega \setminus \mathcal{N}} (v^2 + k_c) W(e(u)) dx + \int_{\tilde{\Omega} \setminus \mathcal{N}} (c|\nabla u|^2 + \frac{(1-v)^2}{4c}) dx, \quad (5.10)$$

where $W(\xi) = \frac{1}{2}\{tr(\xi)^2 + 2e(\xi).e(\xi)\}$ (recall that we have chosen to set all constants at 1). This is the method that has been used for the computations shown in figures 5.3 and 5.4. The results are satisfactory, but can sometimes give results that are not physically admissible (see for example figure 5.4(f)). Implementing unilateral conditions is however an open problem as of yet for want of the proper regularized functional in place of (5.10).

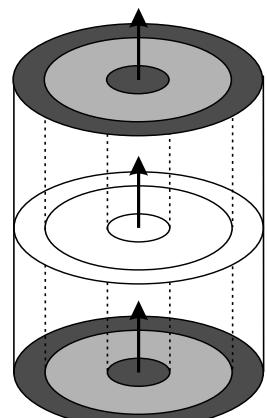
5.3 Numerical experiments

In this section three numerical experiments are described and compared with theoretical predictions, when available. Let us emphasize once again that we do not try and compare our results with those of true experiments —this will be the object of a forthcoming collaborative investigation with experimentalists—, but rather strive to test the validity of the presented computations against the theoretical background developed in [FM98]. The color-coded figures presented below represent the v -field for both methods. The crack site is included within the set of points where that field is near zero (color-coded red in the figures).

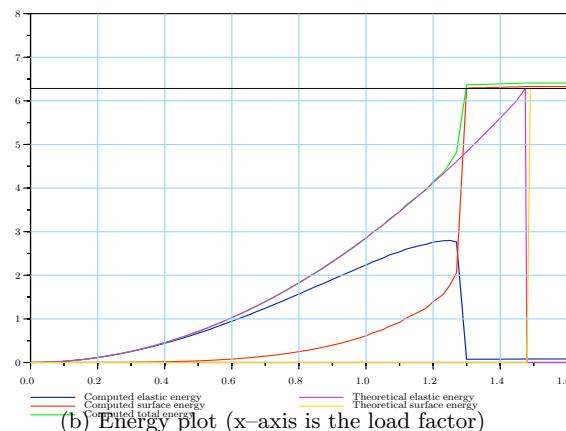
5.3.1 Tearing of a reinforcement

The tearing of a three-dimensional cylinder can be solved in a closed form as demonstrated in [FM98]. A cylinder with annular cross section of respective inner and outer radii 1 and 3 is considered (see figure 5.1(a)). It is glued on its inner surface to a rigid shaft which is submitted to an increasing coaxial displacement field δ . The analytical result predicts —within our formulation— the existence of a critical displacement $\delta_c = \sqrt{2 \log 3} \sim 1.48$ such that if δ is less than δ_c , then no cracks will appear and the solution is that of the elastic problem, while if $\delta \geq \delta_c$, a crack will appear over the entire inner boundary of the material with a surface energy equal to 2π . The computations presented in figure 1 are obtained with the first method. The parameters are $h = 10^{-3}$, $c = 10^{-1}$, $k_c = 10^{-4}$. In figure 5.1(b), we plot the bulk energy, surface energy and total energy versus the load δ . The computed critical load is underestimated but the surface energy is correct within 1%. The plot of the crack field (figure 5.1(d)) corresponds to $\delta = 1.5$. In figure 5.2, the same simulation is run with the second method. Figures 5.2(a) and 5.2(b) represent the first mesh and the corresponding crack field v_T , while in figures 5.2(c) and 5.2(d) the mesh has been adapted 3 times.

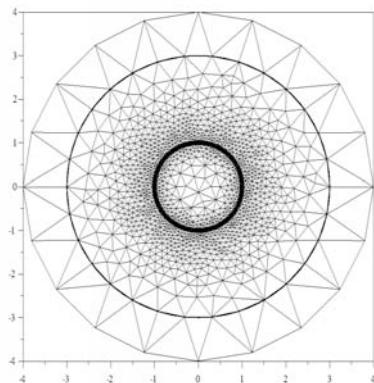
Further, both methods yield a continuous dependence of the total energy upon δ (although that dependence is not shown in figure 2 in the case of the second method), which is in agreement with the theoretical predictions. Indeed, it is shown in Proposition 4.10 of [FM98] that the jump of the elastic energy during brutal crack growth is exactly offset by that of the surface energy; hence, at the time of the total brutal debonding, the total energy should become constant —and equal to 2π — which is exactly the case here.



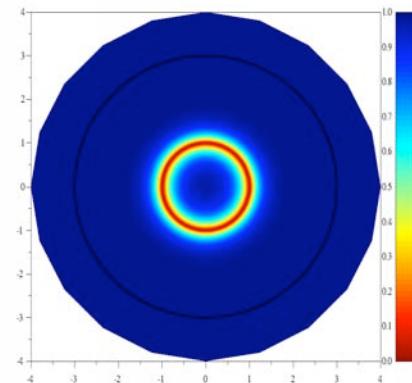
(a) Geometry and loading



(b) Energy plot (x-axis is the load factor)



(c) Mesh



(d) Crack field after failure

Figure 5.1: Tearing of a reinforcement, first method

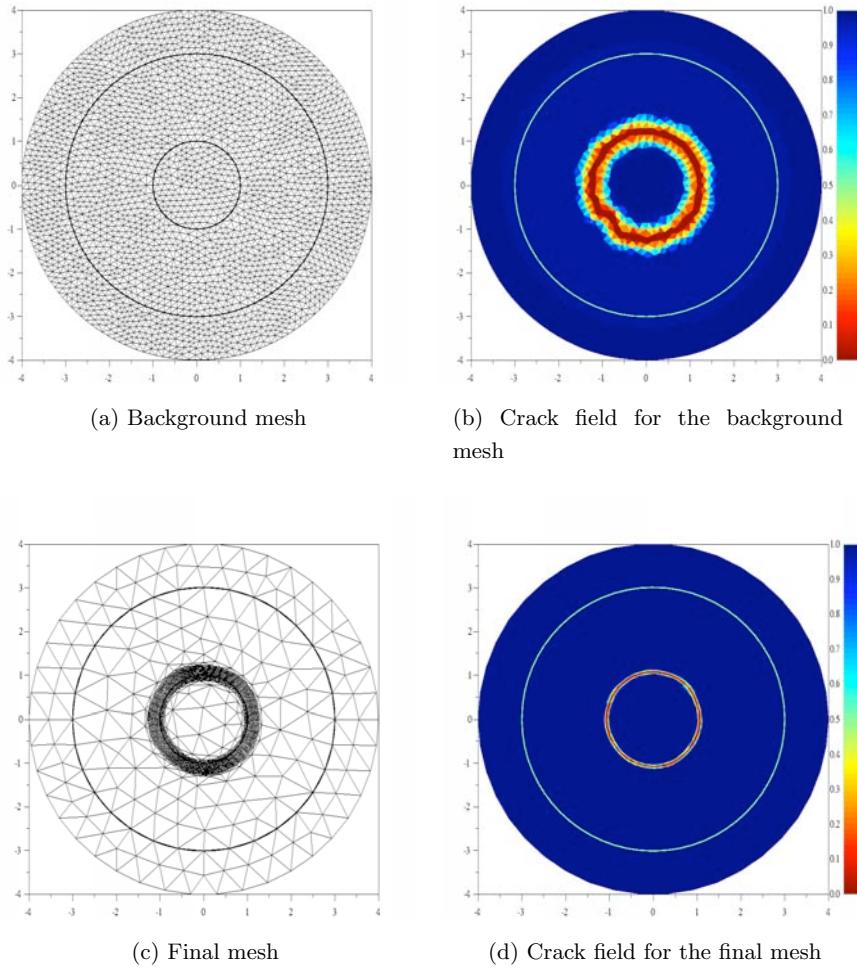


Figure 5.2: Tearing of a reinforcement, second method

5.3.2 Traction experiment on a fiber reinforced matrix

A square elastic matrix is reinforced by a rigid circular fiber as shown in 5.3(a). The fiber remains fixed while a uniform displacement field δ is imposed on the upper side of the square; the remaining sides are traction-free. The following evolution is observed as δ grows:

- 1. As long as $\delta < .2$, the matrix remains purely elastic. Note however the presence of spurious surface energy; we are not, after all, computing the Γ -limit but only an approximation, so that the v -field cannot be expected to be identically 1.
- 2. At $\delta \sim .2$, a crack of finite length brutally appears near the north pole of the inclusion (figure 5.3(c)). This is in agreement with item 4 of Proposition 4.19 in [FM98] (brutal crack growth at finite initiation time in the absence of singular points for the purely

elastic solution).

- 3. When δ varies between .2 and .32, the crack progressively grows in the matrix (figure 5.3(d)).
- 4. At $\delta \sim .32$, the right hand-side of the matrix is brutally cut (figure 5.3(e)). Once again this feature agrees with the theoretical predictions of Remark 4.21 in [FM98].
- 5. When δ varies between .32 and .37, the left part of the crack progressively grows (figure 5.3(f)).
- 6. At $\delta \sim .37$, the crack brutally severs the remaining filament of uncracked material (figure 5.3(g)). Remark 4.21 in [FM98] equally applies here.
- 7. The sample is split into two parts. Note however some spurious elastic energy in figure 5.3(g) caused by the coefficient k_c in the functional.

As in the previous computations of Subsection 5.3.1, there is (nearly) no discontinuity in the total energy during the phases 2., 4., 6. of brutal growth, as theoretically expected.

Figure 5.3(h) is an attempt at checking the validity of the classical Griffith criterion during crack growth; elementary considerations yield the following criterion in our setting:

$$E'(\delta) = \frac{2E_e(\delta)}{\delta},$$

where $E(\delta)$ is the total energy and $E_e(\delta)$ the bulk energy for a given value of δ . As clearly demonstrated in that figure, the criterion is indeed met during the progressive phases of the evolution.

Remark The symmetry breaking evolution for $\delta \geq .32$ might seem somewhat disconcerting. We do not have a definite explanation as of yet. The actual minimum could indeed be asymmetric. We could also possibly be unwillingly trapped around a local minimum; a heuristic solution would then consist in a random sampling of initial guesses, a rather costly undertaking.

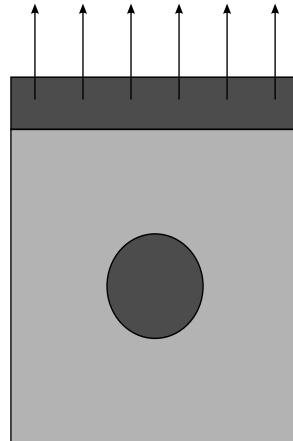
Note that the symmetry breaking direction is purely numerical; the used mesh has been chosen asymmetric, so as to ascertain the reality of lateral symmetry whenever an output of the computations.

Remark Initiation and failure loads, respectively $\delta_i = .2$ and $\delta_f = .37$ fall within the theoretically predicted range of Proposition 4.6 in [FM98], namely

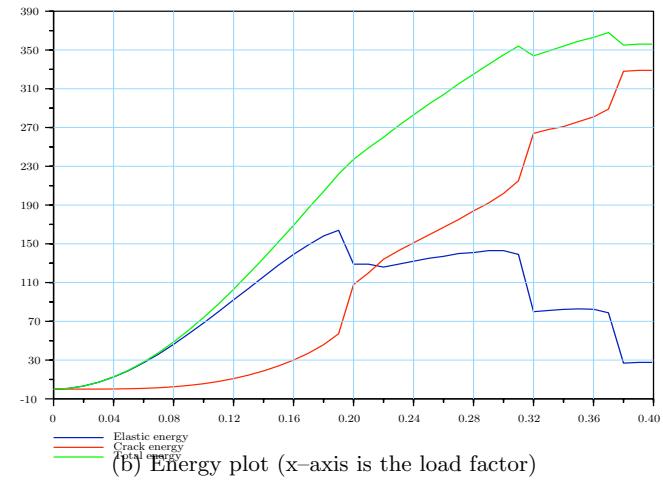
$$\delta_i \leq .222 \leq \delta_f,$$

where the value .222 has been estimated from the plot (figure 5.3(b)) by noting that the elastic energy is ~ 230 when $\delta \sim .195$ and thus that it is ~ 6000 when $\delta = 1$ because it scales like δ^2 .

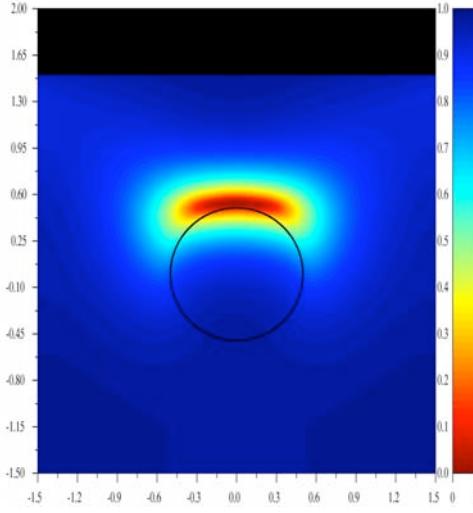
Remark This numerical experiment is exemplary because of the wide range of associated crack behaviors throughout the evolution: brutal versus progressive, edge and bulk fracture, Furthermore there seems to be good qualitative agreement between our results and the experimental observations found in [Hul81].



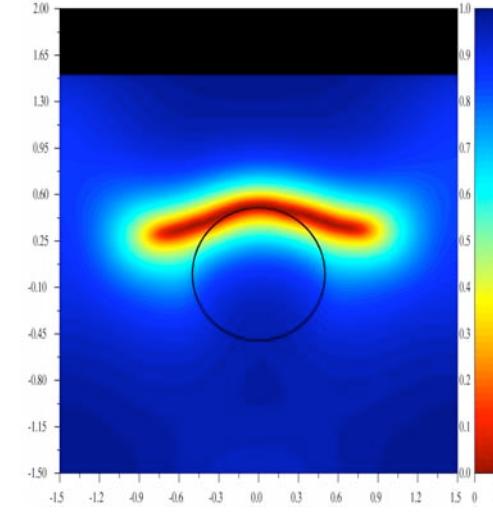
(a) Geometry and loading



(b) Energy plot (x-axis is the load factor)



(c) Crack field, load is 0.2



(d) Crack field, load is 0.31

Figure 5.3: Traction experiment on a fiber reinforced matrix

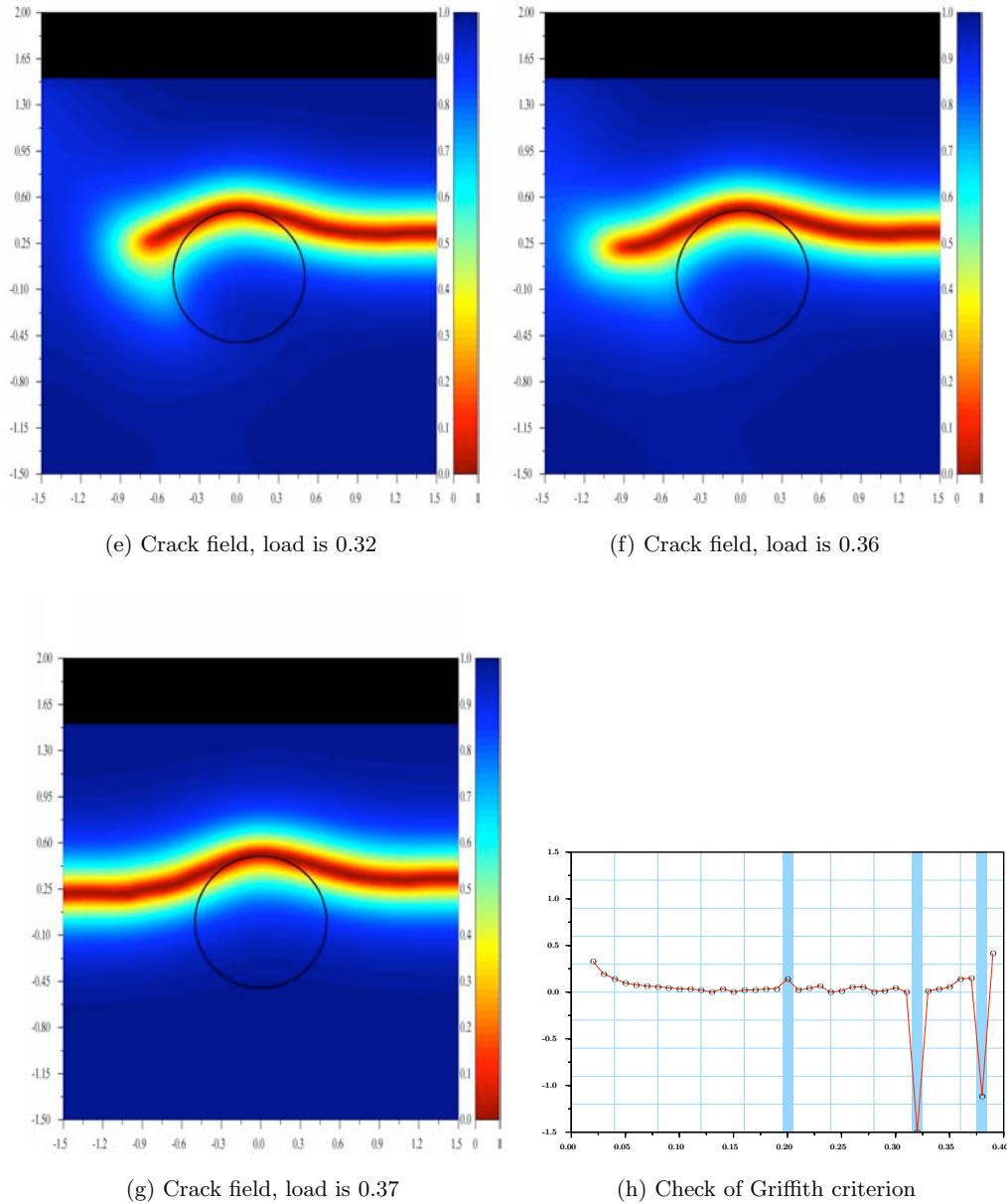


Figure 5.3: Traction experiment on a fiber reinforced matrix

5.3.3 Crack branching

The branching of a crack is one of the conundrums of brittle fracture. The classical Griffith theory is inadequate and additional criteria have to be introduced (see e.g. [Ame87], [AL87], [Leb89] and [Leg93]).

In contrast, our formulation permits branching predictions with no added ingredients as will be demonstrated below. A cracked 2-D rectangular elastic sample is investigated. The crack is parallel to the upper and lower sides of the rectangle and a displacement field of increasing intensity δ and fixed orientation θ is applied to those sides (figure 5.4(a)). The crack evolution is numerically monitored for several values of θ .

- 1. When $\theta = 90^\circ$, the crack propagates, as expected, along the horizontal axis for a critical value for δ (figure 5.4(c)).
- 2. When $7^\circ < \theta < 90^\circ$, the crack branches out from the initial crack tip at some θ -dependent angle for a critical value for δ (figures 5.4(d), 5.4(e)).
- 3. When $0^\circ < \theta < 7^\circ$, the crack develops two symmetric branches for a θ -dependent critical value for δ (figure 5.4(f)). This result does not conform to existing predictions (see e.g. [Ame87]). It should be noted however that the upper branch of the crack interpenetrates the sample, which is not allowed in the classical modeling of crack branching. An adequate rendering of the non-interpenetration condition should hopefully rule out the unrealistic upper branching, but this is merely wishful thinking at this time.

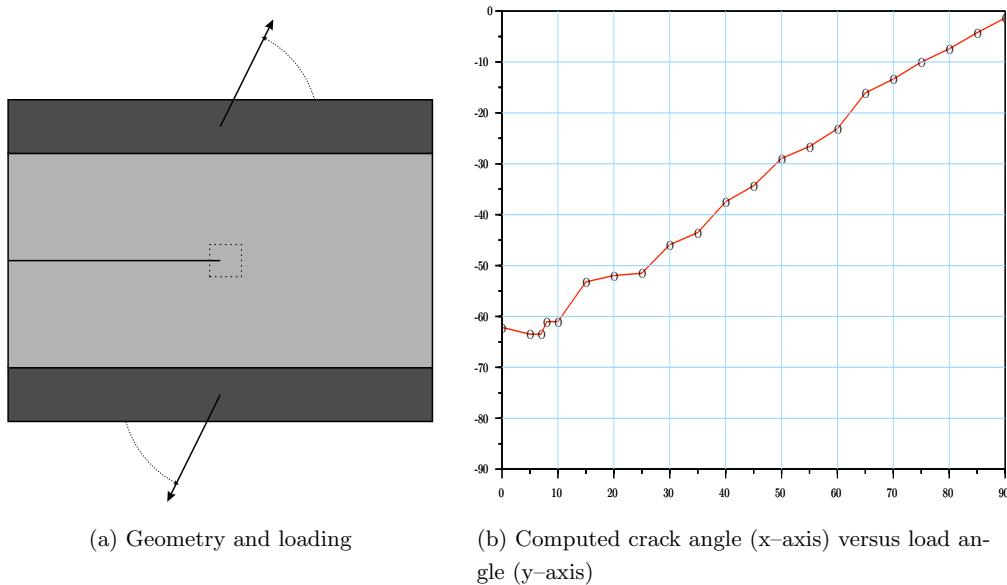


Figure 5.4: Branching of a preexisting crack

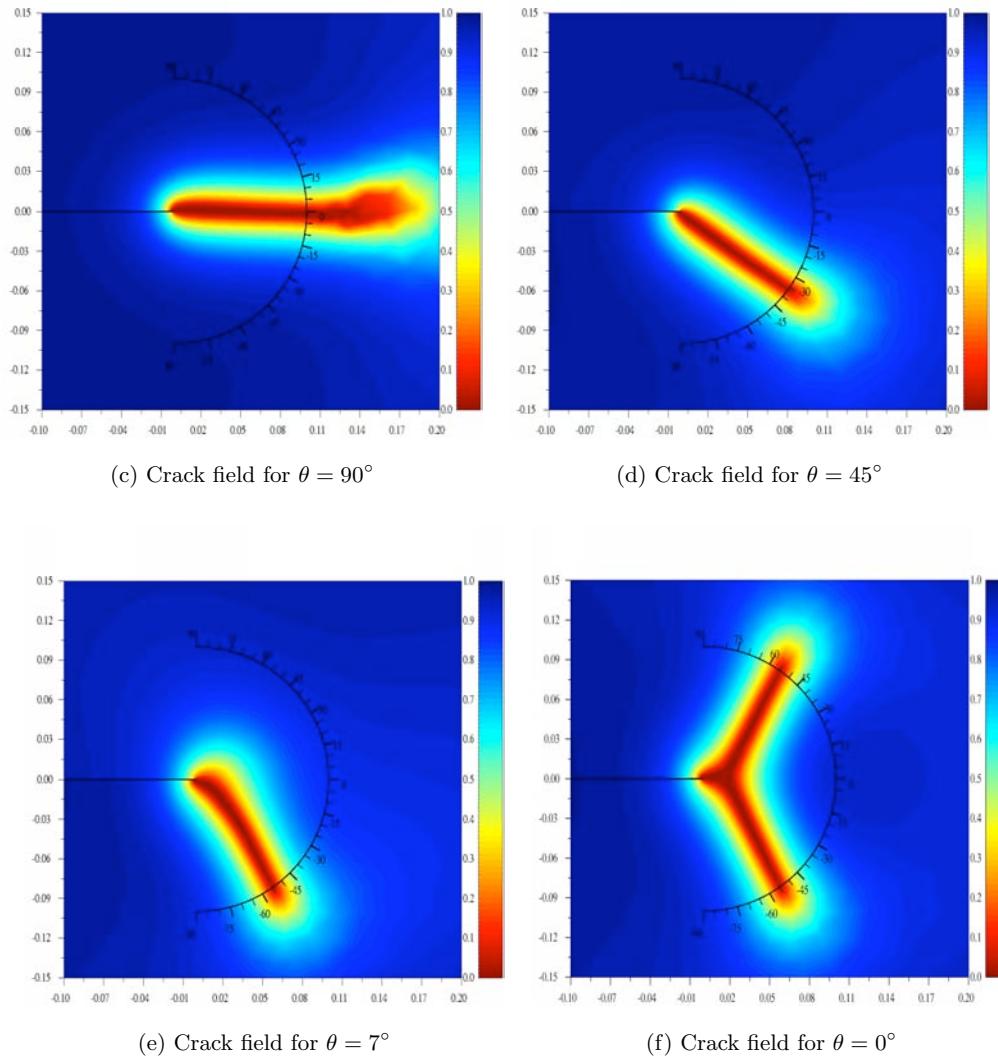


Figure 5.4: Branching of a preexisting crack

Bibliography

- [AL87] M. Amestoy and J.-B. Leblond. Crack path in situation–ii, detailed form of the expansion of the stress intensity factors. *J. Solids Structures*, 29(4):465–501, 1987.
- [Amb89a] L. Ambrosio. A compactness theorem for a new class of functions with bounded variation. *Boll. Un. Mat. Ital. (7)*, 3-B:857–881, 1989.
- [Amb89b] L. Ambrosio. Variational problems in SBV and image segmentation. *Acta Appl. Math.*, 17:1–40, 1989.
- [Amb90] L. Ambrosio. Existence theory for a new class of variational problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 111(1):291–322, 1990.
- [Ame87] M. Amestoy. *Propagation de fissures en élasticité plane*. PhD thesis, Thèse d'état, Paris, 1987.
- [AT90] L. Ambrosio and V.M. Tortorelli. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ -convergence. *Comm. Pure Appl. Math.*, XLIII:999–1036, 1990.
- [AT92] L. Ambrosio and V.M. Tortorelli. On the approximation of free discontinuity problems. *Boll. Un. Mat. Ital. (7)*, 6-B:105–123, 1992.
- [BC94] G. Bellettini and A. Coscia. Discrete approximation of a free discontinuity problem. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 15:105–123, 1994.
- [BC98] B. Bourdin and A. Chambolle. Implementation of an adaptive finite element approximation of the Mumford-Shah functional. Technical Report 9844, CEREMADE, September 1998.
- [BL96] H. Borouchaki and P. Laug. Maillage de courbes gouverné par une carte de métriques. Technical Report RR-2818, INRIA, March 1996.
- [Bou99] B. Bourdin. Image segmentation with a finite element method. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 1999. (to appear).
- [CD98] A. Chambolle and G. Dal Maso. Discrete approximation of the Mumford-Shah functional in dimension two. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 1998. (to appear).
- [Cha98] A. Chambolle. Finite differences discretizations of the Mumford-Shah functional. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 1998. (to appear).
- [CL90] M. Carriero and A. Leaci. Existence theorem for a dirichlet problem with free discontinuity set. *Nonlinear Anal., Th. Meth. Appls.*, 15(7):661–677, 1990.
- [DGCL89] E. De-Giorgi, M. Carriero, and A. Leaci. Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 108:195–218, 1989.

- [FM98] G. Francfort and J.-J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids.*, 46(8):1319–1342, 1998.
- [FVP95] S. Finzi-Vita and P. Perugia. Some numerical experiments on the variational approach to image segmentation. In *Proc. of the Second European Workshop on Image Processing and Mean Curvature Motion*, pages 233–240, Palma de Mallorca, September 25-27 1995.
- [Hul81] Derek Hull. *An introduction to composite materials*. Cambridge University Press, 1981.
- [Leb89] J.-B. Leblond. Crack paths in plane situation–i, general formof the expansion of the stress intensity factor. *J. Solids Structures*, 25:1311–1325, 1989.
- [Leg93] D. Leguillon. Asymptotic and numerical analysis of a crack branching in non-isotropic materials. *Eur. J. Mech A/Solids*, 12(1):33–51, 1993.
- [MM77] L. Modica and S. Mortola. Un esempio di Γ -convergence. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 14-B:285–299, 1977.
- [MS89] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42:577–685, 1989.

Table des matières

Introduction	1
Bibliographie	22
1 Le cas scalaire	27
1.1 Notations et objet de l'étude	29
1.2 Existence d'un minimum	30
1.2.1 Propriétés élémentaires du problème faible	30
1.2.2 Existence d'une solution du problème faible	33
1.2.3 Estimation de la fonctionnelle faible	34
1.2.4 Régularité des minimisateurs du problème faible	35
1.2.5 Existence de la solution du problème fort	52
1.2.6 Extension à des domaines moins réguliers	53
1.3 Méthode de minimisation	54
1.3.1 Présentation de la méthode	54
1.3.2 Estimation de la Γ -limite inférieure	56
1.3.3 Estimation de la Γ -limite supérieure	61
1.3.4 Existence et compacité des minimisateurs de E_c	66
1.3.5 Approximation du problème faible	67
Bibliographie	69
2 Le cas vectoriel	71
2.1 Remarques préliminaires	73
2.2 Existence de solution faibles	74
2.3 Approximation par Γ -convergence	75
Bibliographie	78
3 Mise en œuvre par éléments finis	79
Introduction	81

3.1 Notation	82
3.2 Various results	83
3.2.1 Extension to SBV and equivalent problem	83
3.2.2 Γ -convergence results	84
3.3 The Finite Element Method for Image Segmentation	86
3.3.1 Γ -convergence and piecewise linear approximation	86
3.4 Numerical implementation	91
3.4.1 The constraint on v	91
3.4.2 Minimization strategy	92
3.4.3 Parameter choice	92
3.4.4 General choices	93
3.4.5 Domain decomposition	95
3.5 Numerical results	95
3.5.1 Edge geometry	95
Bibliography	105
4 Mise en œuvre par éléments finis	107
4.1 Introduction	109
4.2 Numerical implementation	114
4.2.1 Minimization method	115
4.2.2 Examples	120
4.2.3 The “stabilized” version	122
4.3 Proof of the convergence results	127
4.3.1 Estimate from below of the Γ -liminf	127
4.3.2 Estimate from above of the Γ -lim sup	133
4.3.3 Proof of Theorem 2	137
Appendix A	138
Appendix A.1	138
Appendix A.2	144
Bibliography	149
5 Expériences numériques	153
5.1 Introduction	155
5.2 Numerical implementation of the model	158

5.2.1	Approximation by an elliptic functional	161
5.2.2	Approximation by means of adaptive finite elements	164
5.2.3	Mutual advantages of both methods	167
5.2.4	Remarks on the plane elasticity case	167
5.3	Numerical experiments	168
5.3.1	Tearing of a reinforcement	168
5.3.2	Traction experiment on a fiber reinforced matrix	170
5.3.3	Crack branching	173
	Bibliography	177