Novos paradigmas em securitização e derivativos de crédito

M. R. Grasselli
Dept. of Mathematics and Statistics
McMaster University

Integral Trust - São Paulo
19 de agosto de 2005

Programa

Parte I

1. Modelos Matemáticos de Default Individual
   (a) Modelos Estruturais
   (b) Modelos de Intensidade
   (c) Ranking de Crédito
2. Defaults múltiplos e correlação

Parte II

3. Derivativos de Crédito Básicos

   (a) Títulos corporativos

   (b) Modelos de Recuperação

   (c) Credit Default Swaps

   (d) First-to-Default swap

4. Collateralized Debt Obligations

1. Modelos Matemáticos de Default

- Risco de crédito é a possibilidade de perdas financeiras devidas a mudanças na qualidade de crédito de participantes do mercado.

- A mudança mais radical é um default.

- Um evento de default é *raro*, acontece *aleatóriamente* e envolve perdas *elevadas* para *alguns* participantes do mercado.

- O evento de default ocorre num tempo de parada denotado por τ.

- A probabilidade de sobrevivência por t anos é $P[\tau > t]$.

- A taxa de azar é definida por

$$h(t) = -\frac{\partial \log P[\tau > t]}{\partial t} \tag{1}$$

- Denote por P_{tT} o preço no tempo t de um zero coupon *livre de default* (e.g. notas do governo americano) que paga 1 dólar no tempo T, e seja $\bar{P}_{tT}$ o preço de um zero coupon *sujeito a default*.

- Denote por Q a probabilidade neutra ao risco.

- Se assumirmos que as taxas de juro são *independentes* de defaults, a probabilidade de sobrevivência implicada é dada por

$$Q[\tau > T|\mathcal{F}_t] = \frac{\bar{P}_{tT}}{P_{tT}}$$

- A diferença entre as taxas pagas por títulos corporativos e títulos livres de default é chamada de credit spread.

- Usando-se a fórmula anterior, pode-se provar por exemplo que

$$Q[t < \tau < t + \Delta t | \mathcal{F}_t] \approx \bar{r}_t - r_t$$

- Ou seja, credit spreads oferecem uma indicação direta das probabilidades de default implicadas.

1.1 Modelos Estruturais

- Procuram explicar o evento de default endogenamente.
- Dependem de hipóteses fortes sobre a estrutura de capital da empresa.
- Pontos fortes: intuitivos, ligação explícita entre débito e equity, risk premium de crédito identificado univocamente.
- Pontos fracos: spreads inconsistentes com dados empíricos, dependem de uma variável não-observável.

1.2 Modelos de Intensidade

- O tempo de default τ é especificado exogenamente.

- Default corresponde ao primeiro salto de um processo de contagem N_t.

- Por exemplo, com um processo de Poisson com intensidade constante λ, temos
$$P[\tau > t] = e^{-\lambda t}.$$

- Como conseqüência, a taxa de azar é $h(t) = \lambda$.

- Uma generalização é definir a intensidade como uma função determinística $\lambda(t)$.

- Nesse caso temos um processo de Poisson não homogêneo, onde

$$P[\tau > t | \tau > s] = e^{-\int_s^t \lambda(t) dt}$$

- A taxa de azar é dada por $h(t) = \lambda(t)$ e pode ser calibrada empiricamente.

- Em geral, a probabilidade instantânea de default depende não apenas da sobrevivência até um certo tempo, mas também de outras variáveis aleatórias (ciclos econômicos, valor das ações da empresa, rebaixamentos em *ranking* de crédito ...).

- Para incorporar essas informações de forma consistente, usa-se os processos duplamente estocásticos, ou processos de Cox.

- Nesses modelos, a intensidade é dada por um processo estocástico λ_t. Uma vez revelada λ_t, defaults ocorrem de acordo com um processo de Poisson com essa intensidade.

- Para um processo de Cox, temos

$$P[\tau > t|\mathcal{F}_s] = E_s\left[e^{-\int_s^t \lambda_u du}\right]$$

- Essa fórmula é semelhante à expressão utilizada para se calcular os preços de zero coupons com taxas de juros estocásticas.

- Pode-se então utilizar modelos conhecidos de taxas de juros para definir a intensidade λ_t (por exemplo o modelo CIR).

- Todas essas fórmulas permanecem válidas se substituirmos P por Q, com intensidade λ^Q.

1.3 Ranking de Crédito

- Agências como Moody's, S&P e Fitch dividem companias em classes de crédito, utilizadas por investidores como indicação da qualidade de crédito de uma determinada compania.

- Esse ranking muda com o tempo, e tem papel fundamental na precificação de derivativos e quantificação de riscos de crédito.

- Como primeira aproximação para um modelo de migração de crédito, utilizamos uma cadeia Markoviana em tempo discreto.

- O ingrediente fundamental para esse modelo é a matriz de transição histórica Π publicada pelas agências.

- Pontos fracos: poucos dados, ignora *momentum* e *aging effect* (em geral ignora diferenças entre firmas na mesma classe), ignora intervalos de tempo intermediários.

- Pontos forte: tratabilidade analítica.

- Extensões: cadeias duplamente estocásticas, cadeias em tempo contínuo.

2. Correlação

- Considere uma carteira de crédito com I devedores, identificados por um índice $i \in \{1, \dots, I\}$.

- Queremos modelar a correlação entre as variáveis aleatórias τ_i (em geral da ordem 2^I).

- Denote por p_i a probabilidade de default individual de cada devedor para um determinado período T e seja L_i o tamanho de cada empréstimo.

- Procuramos a probabilidade de uma perda total X, ou seja, queremos calcular $P[X \leq x]$.

Binomial Expansion Technique (BET)

- Considere por simplicidade empréstimos idênticos de tamanho L e probabilidades individuais idênticas p. Então na ocorrência de n defaults, a perda total é $X = nL$.

- Se todos os eventos de default forem *independentes*,

$$P[X \leq x] = \sum_{m=0}^{n} \frac{I!}{n!(I-n)!} p^n (1-p)^{I-n}$$

- O *score* de diversidade (criado pela Moody's) é uma medida de quanto uma carteira real se aproxima dessa carteira idealizada.

- Modelos de correlação mais realísticos precisam ser derivados (e compatíveis) com os modelos de default individuais anteriores.

- Em modelos estruturais, a correlação de default é introduzida através da correlação nas variáveis fundamentais de cada empresa.

- Produz todo o espectro de correlação possível para os eventos de default (ponto forte)

- Devido à *normalidade*, basta especificar uma matriz de covariância $I \times I$.

- Para reduzir o número de parâmetros, introduzimos modelos de fatores.

- Outra simplificação possível é tratar $I \to \infty$ (more about that later !).

- Em modelos de intensidade, a correlação é introduzida através das intensidades λ_i.

- Pontos fracos: não produz todo o espectro possível de correlações, ineficiente para defaults simultâneos.

- Extensões: intensidades para default simultâneos; default contagioso; Affine Markov Chain models (AMC) (more later...)

- Uma maneira alternativa de se introduzir correlações na prática é através de uma função de cópula.

- Funções de cópula separam o problema de correlação da especificação de probabilidades de default individuais.

- Por exemplo, uma cópula Gaussiana introduz correlações *normais*, quaisquer que sejam as distribuições individuais.

- Cópulas com maior dependência de cauda podem ser usadas para introduzir correlações mais extremas, mesmo que as distribuições individuais tenham decaimente rápido.

3. Derivativos de Crédito Básicos

3.1 Títulos Corporativos

- Em modelos estruturais, os títulos corporativos são considerados opções nos ativos da própria empresa.

- Por exemplo, no modelo clássico de Merton, ao final do período T os acionistas recebem

$$(A_T - K)^+,$$

onde K é o valor nominal do débito, ou seja, o equivalente à uma opção de compra.

- Os detentores de título, por sua vez, recebem

$$\text{min}(K, A_T) = K - (K - A_T)^+,$$

ou seja, uma combinação de um zero coupon e uma opção de venda.

- Modelos estruturais mais complicados (first passage, excursion models) levam a interpretar títulos como opções mais complicadas (down-and-in calls, occupation time derivatives...)

- Boa fonte de emprego para quants.

- Em modelos de intensidade, títulos corporativos são interpretados como derivativos com *pay-off* igual a $\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}$.

- Dessa forma

$$\bar{P}_{tT} = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbf{1}_{\{\tau>T\}} \right].$$

- Essa expressão resulta na famosa fórmula de Lando:

$$\bar{P}_{tT} = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T (r_s+\lambda_s) ds} \right]$$

- Para *intensidades afins* esse valor esperado é explícito.

3.2 Modelos de Recuperação

- Em geral, no evento de default, derivativos de crédito não perdem completamente seu valor, mas decrescem para uma *fração do valor nominal*.

- Essa fração (aleatória) é chamada de taxa de recuperação.

- Modelos de recuperação populares são: *zero-recovery, recovery of treasury, recovery of par* e *recovery of market value*.

- Essa última é a mais interessante e resulta na expressão

$$\bar{P}_{tT}^{RMV} = E_t\left[e^{-\int_t^T (r_s+(1-R)\lambda_s)ds}\right].$$

3.3 Credit Default Swap

- A estrutura básica de um CDS é de um comprador de proteção **A**, um vendedor de proteção **B** e uma entidade de referência de crédito **C**.

- **A** paga a **B** uma taxa fixa s_C até a maturidade T se não ocorrer default de **C**.

- Se ocorrer default de **C** no tempo $\tau < T$, **B** paga a **A** o valor $(1 - R_\tau)\mathcal{N}$, onde $\mathcal{N}$ é o valor nominal do contrato.

- Tipicamente $\mathcal{N}$ vai de 1 a centenas de milhões de dólares, T vai de 1 a 10 anos e a taxa s_C é anualizada mas paga em datas pré-especificadas $\mathcal{T} = \{0 < T_1 < \cdots < T_K = T\}$.

- Por precificação de um CDS entende-se a determinação da taxa s_C (chamada de CDS spread) de maneira que no início do período o contrato tenha valor zero.

- Se chamarmos de b_k o valor de mercado no tempo $t < T_1$ do pagamento efetuado por **B** caso um default ocorra entre as datas $(T_{k-1}, T_k]$, então

$$b_k = (1 - R)\mathcal{N}\left(E^Q\left[e^{-\int_t^{T_k} r_s ds}\mathbf{1}_{\{\tau > T_{k-1}\}}\right] - \bar{P}_{tT_k}\right).$$

- Por outro lado, o valor de mercado no tempo $t < T_1$ de um pagamento efetuado por **A** em T_k é

$$a_k = s_C(T_k - T_{k-1})\mathcal{N}\bar{P}_{tT_k}.$$

- O valor total do CDS é então

$$\sum_{k=1}^{K}(b_k - a_k),$$

3.4 First-to-Default

- Na presença de diversas companias (digamos I), ao invés de comprar proteções individuais por meio de vários CDS, o investidor **A** pode comprar um FtD swap.

- **A** paga a **B** uma taxa s_{FtD} enquanto nenhum dos devedores apresentar default.

- **B** paga a **A** o valor $(1 - R^i_\tau)$ no momento em que o primeiro default ocorrer, quando então o contrato é terminado.

- Esse contrato remove *praticamente* todo o risco de default da carteira inteira.

- Considere devedores C_1, C_2, C_3 em ordem decrescente de qualidade de crédito.

- Por argumentos de arbitragem, é fácil deduzir que o FtD spread para essa carteira deve satisfazer a seguinte desigualdade

$$s_{C_3} \leq s^{Ftd} \leq s_{C_1} + s_{C_2} + s_{C_3}$$

- Na prática essa desigualdade estabelece um intervalo muito grande. Para melhor acurácia, deve-se recorrer aos modelos de correlação apresentados anteriormente.

4. Collateralized Debt Obligations

- Considere uma coleção de devedore $\{C_1, \ldots, C_I\}$ com débito de valor nominal K_i (por exemplo, títulos no caso de CBO).

- A carteira é então transferida para um *Special Purpose Vehicle* (SPV), que emite notas baseadas nesse colateral.

- O SPV emite
  - Uma *equity tranche* de valor nominal K_E.
  - Diversas *mezzanine tranches* de valor nominal K_{M_i}.
  - Uma *senior tranche* de valor nominal K_S.

- No exemplo mais simples possível de CDO, cada vez que uma compania sofre default, o valor de recuperação de seu débito é reinvestido em notas governamentais.

- Ao final de um período T, a carteria é liquidada e valor total obtido é redistribuido aos investidores de acordo com *senior-idade*: primeiro a senior, depois as diversas mezzanine e por fim a equity.

- Essa estrutura de redistribuição é chamada de *pagamento em cascada*.

- Os proprietários de cada tranche agem portanto como vendedores de proteção sobre a carteira de acordo com uma estrutura de perdas absolutas por camadas, ao invés de proteção por perdas individuais ou por número de defaults.

- Por precificação de um CDO entende-se a especificação da taxa de juro paga por cada tranche.

- Extensões: *syntetic* CDOs (usa CDS ao invés de títulos), CDOs que pagam coupons em datas especificadas, CDOs administrados (*market value CDO*) ...

- Conforme visto, um CDO é um derivativo de crédito vinculado à distribuição de perdas de uma carteira de devedores.

- Portanto, sua precificação depende de todos os elementos apresentados anteriormente (default individuais, correlação e ranking de crédito).

Os métodos mais populares para precificação de CDO são:

1. Intensidade (utiliza força bruta e simulação de default por Monte Carlo)

2. Fatores e cópulas (resultados mais rápidos mas dependem de uma especificação de correlação arbitrária)

3. Aproximações para carteria muito grande (usa teoria de large deviations, produz bons resultados para $I \to \infty$)

Affine Markov Chain model

- Modelo desenvolvido pelo PhiMac - McMaster University, em fase de implementação para produtos reais.

- Baseia-se em princípios fundamentais de mercado, como relógios estocásticos para medir períodos de maior e menor atividade.

- Computacionalmente eficiente e acurado (baseia-se em fórmulas semi-fechadas e transformadas de Fourier).

- Reproduz as características mais importantes de modelos estruturais e de intensidade, evitando os seus pontos fracos.