Novos paradigmas na precificação de CDO e derivativos de crédito no mercado internacional

M. Grasselli

Mathematics and Statistics
McMaster University

Integral Trust - São Paulo
21 de junho de 2006

Programa

1. Modelos Matemáticos de Default Individual
   1.1 Modelos Estruturais
   1.2 Modelos de Intensidade
   1.3 Ranking de Crédito
2. Defaults múltiplos e correlação
3. Derivativos de Crédito Básicos
   3.1 Títulos corporativos
   3.2 Modelos de Recuperação
   3.3 Credit Default Swaps
   3.4 First-to-Default swap
4. Collateralized Debt Obligations

Probabilidade Histórica

- O evento de default ocorre num tempo de parada denotado por τ.
- A probabilidade de sobrevivência por t anos é $P[\tau > t]$.
- A taxa de azar é definida por

$$h(t) = -\frac{\partial \log P[\tau > t]}{\partial t}. \tag{1}$$

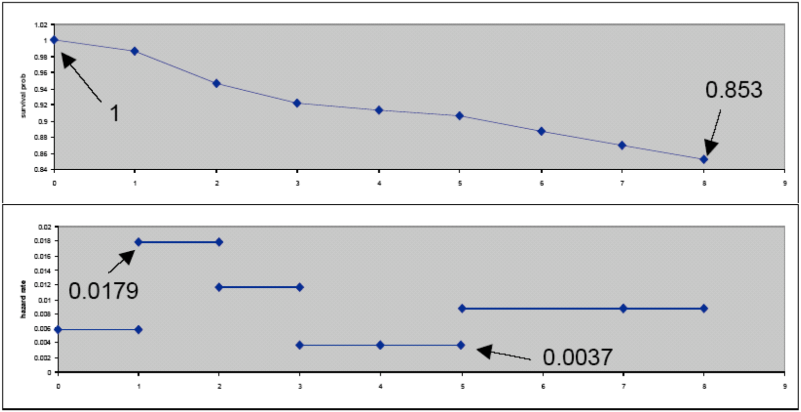

Figure: Probabilidade de sobrevivência e taxas de hazar.

Probabilidade Implicada

- Denote por P_{tT} o preço no tempo t de um zero coupon *livre de default* (e.g. notas do governo americano) que paga 1 dólar no tempo T, e seja $\bar{P}_{tT}$ o preço de um zero coupon *sujeito a default*.
- Denote por Q a probabilidade neutra ao risco.
- Se assumirmos que as taxas de juro são *independentes* de defaults, a probabilidade de sobrevivência implicada é dada por

$$Q[\tau > T|\mathcal{F}_t] = \frac{\bar{P}_{tT}}{P_{tT}}$$

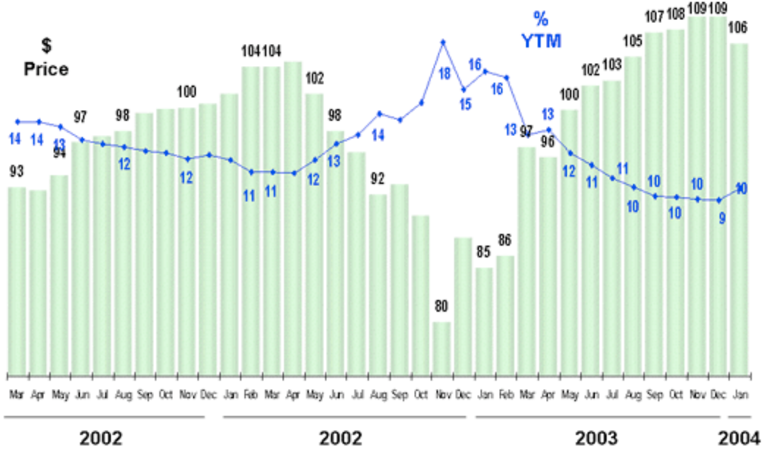

Figure: Preços de títulos para uma corporação (maturidade em 2008).

Spreads de Crédito

- A diferença entre as taxas pagas por títulos corporativos e títulos livres de default é chamada de credit spread.
- Usando-se a fórmula anterior, pode-se provar por exemplo que

$$Q[t < \tau < t + \Delta t | \mathcal{F}_t] \approx \bar{r}_t - r_t$$

- Ou seja, credit spreads oferecem uma indicação direta das probabilidades de default implicadas.

Figure: Taxas pagas por um título corporativo e um título livre de default.

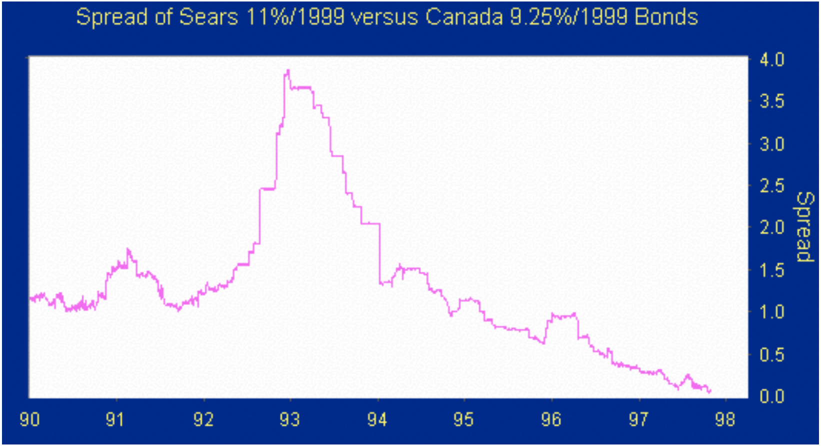

Figure: Spreads de crédito como função do tempo.

Modelos Estruturais

- Procuram explicar o evento de default endogenamente.
- Dependem de hipóteses fortes sobre a estrutura de capital da empresa.
- Pontos fortes: intuitivos, ligação explícita entre débito e equity, risk premium de crédito identificado univocamente.
- Pontos fracos: spreads inconsistentes com dados empíricos, dependem de uma variável não-observável.

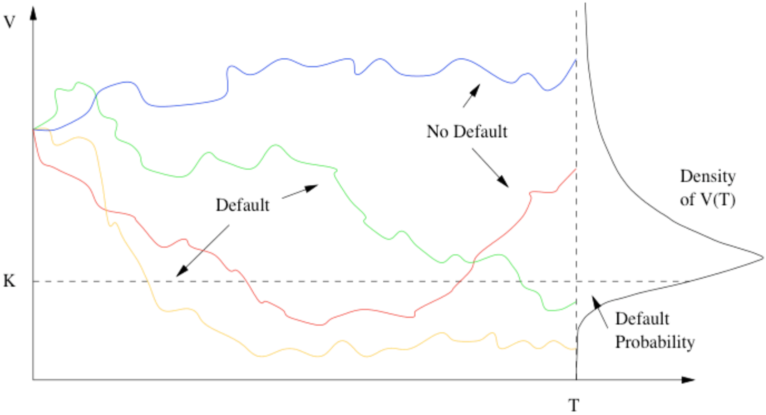

Figure: Eventos de default em modelos estruturais.

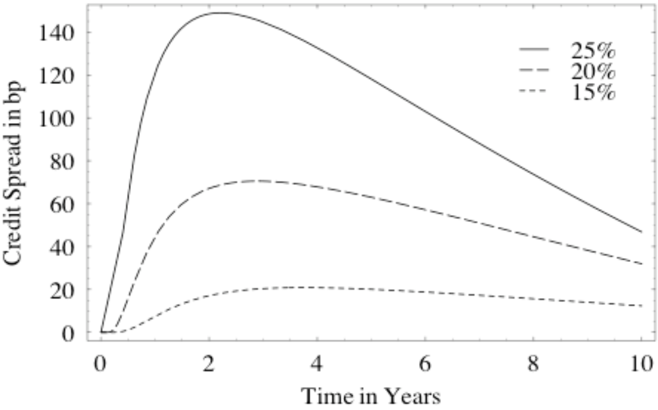

Figure: Spreads de crédito em modelos estruturais

Modelos de Intensidade

- O tempo de default τ é especificado exogenamente.
- Default corresponde ao primeiro salto de um processo de contagem N_t.
- Por exemplo, com um processo de Poisson com intensidade constante λ, temos

$$P[\tau > t] = e^{-\lambda t}.$$

- Como conseqüência, a taxa de azar é $h(t) = \lambda$.

Intensidade Variável

- Uma generalização é definir a intensidade como uma função determinística $\lambda(t)$.
- Nesse caso temos um processo de Poisson não homogêneo, onde
$$P[\tau > t|\tau > s] = e^{-\int_s^t \lambda(t)dt}$$
- A taxa de azar é dada por $h(t) = \lambda(t)$ e pode ser calibrada empiricamente.

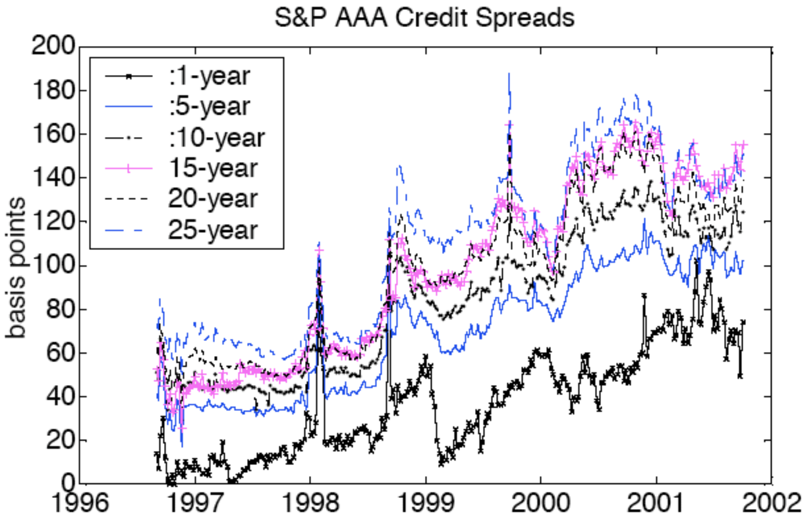

Figure: Spreads de crédito observados no mercado.

Intensidade Estocástica

- Em geral, a probabilidade instantânea de default depende não apenas da sobrevivência até um certo tempo, mas também de outras variáveis aleatórias (ciclos econômicos, valor das ações da empresa, rebaixamentos em *ranking* de crédito ...).
- Para incorporar essas informações de forma consistente, usa-se os processos duplamente estocásticos, ou processos de Cox.
- Nesses modelos, a intensidade é dada por um processo estocástico λ_t. Uma vez revelada λ_t, defaults ocorrem de acordo com um processo de Poisson com essa intensidade.

Exemplos de Processos de Cox

- Para um processo de Cox, temos

$$P[\tau > t|\mathcal{F}_s] = E_s\left[e^{-\int_s^t \lambda_u du}\right]$$

- Essa fórmula é semelhante à expressão utilizada para se calcular os preços de zero coupons com taxas de juros estocásticas.
- Pode-se então utilizar modelos conhecidos de taxas de juros para definir a intensidade λ_t (por exemplo o modelo CIR).
- Todas essas fórmulas permanecem válidas se substituirmos P por Q, com intensidade λ^Q.

Ranking de Crédito

- Agências como Moody's, S&P e Fitch dividem companias em classes de crédito, utilizadas por investidores como indicação da qualidade de crédito de uma determinada compania.
- Esse ranking muda com o tempo, e tem papel fundamental na precificação de derivativos e quantificação de riscos de crédito.
- Como primeira aproximação para um modelo de migração de crédito, utilizamos uma cadeia Markoviana em tempo discreto.

Matrizes de transição

- O ingrediente fundamental para esse modelo é a matriz de transição histórica Π publicada pelas agências.
- Pontos fracos: poucos dados, ignora *momentum* e *aging effect* (em geral ignora diferenças entre firmas na mesma classe), ignora intervalos de tempo intermediários.
- Pontos forte: tratabilidade analítica.
- Extensões: cadeias duplamente estocásticas, cadeias em tempo contínuo.

$$\Pi = \begin{bmatrix} 89.14 & 9.78 & 1.06 & 0.00 & 0.03 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.14 & 89.13 & 9.25 & 0.32 & 0.11 & 0.01 & 0.00 & 0.03 \\ 0.06 & 2.97 & 90.28 & 5.81 & 0.69 & 0.18 & 0.01 & 0.01 \\ 0.06 & 0.36 & 7.01 & 85.47 & 5.82 & 1.02 & 0.08 & 0.17 \\ 0.03 & 0.07 & 0.59 & 5.96 & 82.41 & 8.93 & 0.58 & 1.44 \\ 0.01 & 0.04 & 0.22 & 0.61 & 6.43 & 82.44 & 3.29 & 6.96 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.95 & 2.85 & 6.15 & 62.36 & 27.68 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 100.00 \end{bmatrix}$$

Figure: Matriz de transição da Moody's com as médias anuais no período de 1980 a 2000 .

Correlação

- Considere uma carteira de crédito com I devedores, identificados por um índice $i \in \{1, \ldots, I\}$.
- Queremos modelar a correlação entre as variáveis aleatórias τ_i (em geral da ordem 2^I).
- Denote por p_i a probabilidade de default individual de cada devedor para um determinado período T e seja L_i o tamanho de cada empréstimo.
- Procuramos a probabilidade de uma perda total X, ou seja, queremos calcular $P[X \leq x]$.

Binomial Expansion Technique (BET)

- Considere por simplicidade empréstimos idênticos de tamanho L e probabilidades individuais idênticas p. Então na ocorrência de n defaults, a perda total é $X = nL$.
- Se todos os eventos de default forem *independentes*,

$$P[X \leq x] = \sum_{m=0}^{n} \frac{I!}{n!(I-n)!} p^n (1-p)^{I-n}$$

- O *score* de diversidade (criado pela Moody's) é uma medida de quanto uma carteira real se aproxima dessa carteira idealizada.

Correlação em modelos estruturais

- Modelos de correlação mais realísticos precisam ser derivados (e compatíveis) com os modelos de default individuais anteriores.
- Em modelos estruturais, a correlação de default é introduzida através da correlação nas variáveis fundamentais de cada empresa.
- Produz todo o espectro de correlação possível para os eventos de default (ponto forte)
- Devido à *normalidade*, basta especificar uma matriz de covariância $I \times I$.
- Para reduzir o número de parâmetros, introduzimos modelos de fatores.
- Outra simplificação possível é tratar $I \to \infty$.

Correlação em modelos de intensidade

- Em modelos de intensidade, a correlação é introduzida através das intensidades estocásticas λ_i.
- Pontos fracos: não produz todo o espectro possível de correlações, ineficiente para defaults simultâneos.
- Extensões: intensidades para default simultâneos; default contagioso; Affine Markov Chain models (AMC) (more later about that later...)

Cópulas

- Uma maneira alternativa de se introduzir correlações na prática é através de uma função de cópula.
- Funções de cópula separam o problema de correlação da especificação de probabilidades de default individuais.
- Por exemplo, uma cópula Gaussiana introduz correlações *normais*, quaisquer que sejam as distribuições individuais.
- Cópulas com maior dependência de cauda podem ser usadas para introduzir correlações mais extremas, mesmo que as distribuições individuais tenham decaimente rápido.

Títulos Corporativos em modelos estruturais

- Em modelos estruturais, os títulos corporativos são considerados opções nos ativos da própria empresa.
- Por exemplo, no modelo clássico de Merton, ao final do período T os acionistas recebem

$$(A_T - K)^+,$$

onde K é o valor nominal do débito, ou seja, o equivalente à uma opção de compra.
- Os detentores de título, por sua vez, recebem

$$\min(K, A_T) = K - (K - A_T)^+,$$

ou seja, uma combinação de um zero coupon e uma opção de venda.
- Modelos estruturais mais complicados (first passage, excursion models) levam a interpretar títulos como opções mais complicadas (down-and-in calls, occupation time derivatives...)
- Boa fonte de emprego para quants.

Títulos Corporativos em modelos de intensidade

- Em modelos de intensidade, títulos corporativos são interpretados como derivativos com *pay-off* igual a $\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}$.
- Dessa forma

$$\bar{P}_{tT} = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right].$$

- Essa expressão resulta na famosa fórmula de Lando:

$$\bar{P}_{tT} = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T (r_s + \lambda_s) ds} \right]$$

- Para *intensidades afins* esse valor esperado é explícito.

Modelos de Recuperação

- Em geral, no evento de default, derivativos de crédito não perdem completamente seu valor, mas decrescem para uma *fração do valor nominal*.
- Essa fração (aleatória) é chamada de taxa de recuperação.
- Modelos de recuperação populares são: *zero-recovery, recovery of treasury, recovery of par* e *recovery of market value*.
- Essa última é a mais interessante e resulta na expressão

$$\bar{P}_{tT}^{RMV} = E_t \left[e^{-\int_t^T (r_s + (1-R)\lambda_s) ds} \right].$$

Credit Default Swap

- A estrutura básica de um CDS é de um comprador de proteção **A**, um vendedor de proteção **B** e uma entidade de referência de crédito **C**.
- **A** paga a **B** uma taxa fixa s_C até a maturidade T se não ocorrer default de **C**.
- Se ocorrer default de **C** no tempo $\tau < T$, **B** paga a **A** o valor $(1 - R_\tau)\mathcal{N}$, onde $\mathcal{N}$ é o valor nominal do contrato.
- Tipicamente $\mathcal{N}$ vai de 1 a centenas de milhões de dólares, T vai de 1 a 10 anos e a taxa s_C é anualizada mas paga em datas pré-especificadas $\mathcal{T} = \{0 < T_1 < \cdots < T_K = T\}$.

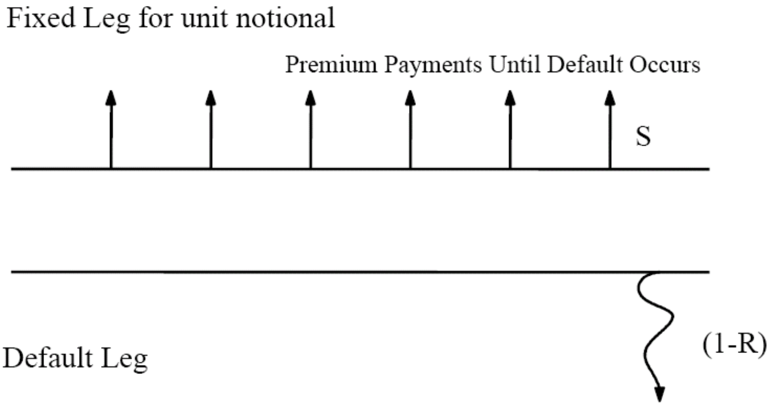

Figure: Fluxos de caixa em um CDS.

Precificação de CDS

- Por precificação de um CDS entende-se a determinação da taxa s_C, chamada de CDS spread, de maneira que no início do período o contrato tenha valor zero.
- Se chamarmos de b_k o valor de mercado no tempo $t < T_1$ do pagamento efetuado por **B** caso um default ocorra entre as datas $(T_{k-1}, T_k]$, então

$$b_k = (1 - R)\mathcal{N}\left(E^Q\left[e^{-\int_t^{T_k} r_s ds}\mathbf{1}_{\{\tau > T_{k-1}\}}\right] - \bar{P}_{tT_k}\right).$$

- Por outro lado, o valor de mercado no tempo $t < T_1$ de um pagamento efetuado por **A** em T_k é

$$a_k = s_C(T_k - T_{k-1})\mathcal{N}\bar{P}_{tT_k}.$$

- O valor total do CDS é então

$$\sum_{k=1}^{K}(b_k - a_k),$$

First-to-Default

- Na presença de diversas companias (digamos I), ao invés de comprar proteções individuais por meio de vários CDS, o investidor **A** pode comprar um FtD swap.
- **A** paga a **B** uma taxa s_{FtD} enquanto nenhum dos devedores apresentar default.
- **B** paga a **A** o valor $(1 - R^i_\tau)$ no momento em que o primeiro default ocorrer, quando então o contrato é terminado.
- Esse contrato remove *praticamente* todo o risco de default da carteira inteira.

Estimativas para FtD spread

- Considere devedores C_1, C_2, C_3 em ordem decrescente de qualidade de crédito.
- Por argumentos de arbitragem, é fácil deduzir que o FtD spread para essa carteira deve satisfazer a seguinte desigualdade

$$s_{C_3} \leq s^{Ftd} \leq s_{C_1} + s_{C_2} + s_{C_3}$$

- Na prática essa desigualdade estabelece um intervalo muito grande. Para melhor acurácia, deve-se recorrer aos modelos de correlação apresentados anteriormente.

Collateralized Debt Obligations

- Considere uma coleção de devedore $\{C_1, \ldots, C_I\}$ com débito de valor nominal K_i (por exemplo, títulos no caso de CBO).
- A carteira é então transferida para um *Special Purpose Vehicle* (SPV), que emite notas baseadas nesse colateral.
- O SPV emite
  - Uma *equity tranche* de valor nominal K_E.
  - Diversas *mezzanine tranches* de valor nominal K_{M_i}.
  - Uma *senior tranche* de valor nominal K_S.

Estrutura de pagamentos num CDO

- No exemplo mais simples possível de CDO, cada vez que uma companía sofre default, o valor de recuperação de seu débito é reinvestido em notas governamentais.
- Ao final de um período T, a carteria é liquidada e valor total obtido é redistribuido aos investidores de acordo com *senioridade*: primeiro a senior, depois as diversas mezzanine e por fim a equity.
- Essa estrutura de redistribuição é chamada de *pagamento em cascada*.

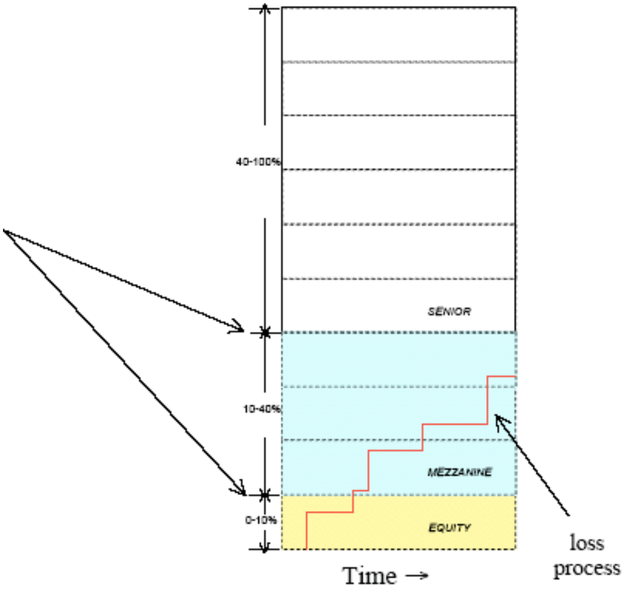

Figure: Estrutura de um CDO.

Propriedades de um CDO

- Os proprietários de cada tranche agem portanto como vendedores de proteção sobre a carteira de acordo com uma estrutura de perdas absolutas por camadas, ao invés de proteção por perdas individuais ou por número de defaults.
- Extensões: *syntetic* CDOs (usa CDS ao invés de títulos), CDOs que pagam coupons em datas especificadas, CDOs administrados (*market value CDO*) ...

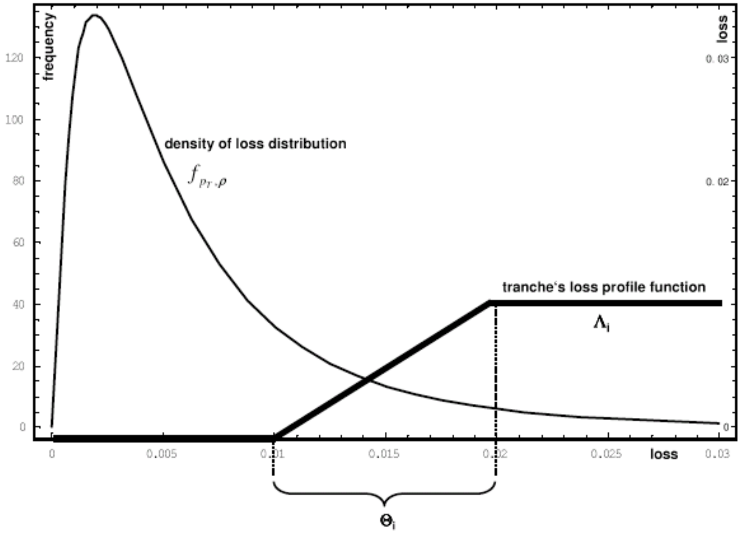

Figure: Perdas em uma das *tranches*.

Precificação de um CDO

- Conforme visto, um CDO é um derivativo de crédito vinculado à distribuição de perdas de uma carteira de devedores.
- Portanto, sua precificação depende de todos os elementos apresentados anteriormente (default individuais, correlação e ranking de crédito).
- Os métodos mais populares para precificação de CDO são:
  1. Intensidade (utiliza força bruta e simulação de default por Monte Carlo)
  2. Fatores e cópulas (resultados mais rápidos mas dependem de uma especificação de correlação arbitrária)
  3. Aproximações para carteria muito grande (usa teoria de large deviations, produz bons resultados para $I \to \infty$)

Affine Markov Chain model

- Modelo desenvolvido pelo PhiMac - McMaster University, em fase de popularização e implementação.
- Baseia-se em princípios fundamentais de mercado, como relógios estocásticos para medir períodos de maior e menor atividade.
- Computacionalmente eficiente e acurado (baseia-se em fórmulas semi-fechadas e transformadas de Fourier).
- Reproduz as características mais importantes de modelos estruturais e de intensidade, evitando os seus pontos fracos.